Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2—1953

А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

О НАМАГНИЧИВАНИИ МАГНИТНО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Решение задачи о размагничивании проводящего цилиндра хорошо известно и впервые было получено на основе уравнений Максвелла Б. А. Введенским [1]. В. К. Аркадьев первый указал на необходимость учета при этом магнитной вязкости: Р. В. Телесниным [2] был выполнен ряд экспериментальных работ в этой области. А. Н. Тихонов [3] дал решение задачи о намагничивании проводящего плоского слоя при наличии магнитной вязкости, которая учитывалась с помощью уравнения Аркадьева.

В настоящей статье мы рассматриваем задачу о перемагничивании цилиндрического образца, сделанного из магнитного диэлетрика. У магнитных диэлектриков проводимость чрезвычайно мала (в ряде случаев в 10^9 раз меньше, чем у железа), и определяющими процесс являются токи смещения. Хотя в этом случае токами проводимости практически можно пренебречь по сравнению с токами смещения, однако мы проведем исследование, считая, что $\sigma \neq 0$. Полученное решение [2] используется для определения по данным измерений потока индукции $\Phi = \Phi(t)$ коэффициентов магнитной вязкости и магнитной проницаемости

$$\mu_0 = 1 + 4\pi\varkappa_0, \quad \mu = 1 + 4\pi\varkappa, \tag{1}$$

где $\varkappa_0$ — коэффициент упругой магнитной восприимчивости, $\varkappa$ — коэффициент вязкой магнитной восприимчивости.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть бесконечный цилиндр радиуса r_0 с характерными постоянными ε и σ находится в постоянном внешнем магнитном поле величины H_0, параллельном оси цилиндра (оси OZ). В момент $t=0$, когда внутри цилиндра уже установилось всюду постоянное поле H_0, внешнее магнитное поле меняет свою величину от значения H_0 до значения H_1.

Нестационарный процесс перемагничивания с учетом вязкости определяется уравнениями

$$rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$rot\,\vec{B} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$div\,\vec{B} = 0, \tag{4}$$

$$div\,\varepsilon\vec{E} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \beta(\varkappa\vec{H} - \vec{I}) \quad \text{(уравнение Аркадьева)}, \tag{6}$$

причем

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi(\vec{I}_0 + \vec{I}), \tag{7}$$

где

$\vec{I}_0 = \varkappa_0\vec{H}$ — вектор упругой намагниченности,

$\vec{I}$ — вектор вязкой намагниченности.

Согласно условиям задачи, можно считать, что все векторы магнитного поля направлены вдоль оси OZ, причем

$$B = B(r,\ t), \quad H = H(r,\ t), \quad I = I(r,\ t). \tag{8}$$

Исключая из уравнений (2) и (3) вектор $\vec{E}$, будем иметь

$$\Delta_2 H = \alpha\frac{\partial B}{\partial t} + \gamma\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}, \tag{9}$$

где

$$\Delta_2 H = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right), \quad \alpha = \frac{4\pi\sigma}{c^2}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{c^2}.$$

Сформулируем начальные и краевые условия. В начальный момент при $t = 0$

$$H(r,\ 0) = H_0, \quad I(r,\ 0) = \varkappa H_0,$$

а электрическое поле равно нулю, или в силу уравнения (3)

$$\frac{\partial B}{\partial t}(r,\ 0) = 0.$$

Отсюда, как нетрудно убедиться, следует:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(r,\ 0) = 0.$$

Так как поле изнутри цилиндра непрерывно примыкает при $r = r_0$ (r_0 — радиус цилиндра) к значению внешнего поля H_1, то

$$H(r_0,\ t) = H_1.$$

Чтобы избавиться от неоднородности в краевых условиях при $r = r_0$, положим

$$\begin{aligned} H &= H_1 + h, \\ I &= \varkappa H_1 + i, \end{aligned} \tag{10}$$

так что магнитная индукция, равная

$$B = \mu_0 H + 4\pi I,$$

представится в виде

$$B = \mu H_1 + \mu_0 h + 4\pi i. \tag{11}$$

В результате мы приходим к следующей математической задаче: найти решение уравнений

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)=\alpha\left(\mu_0\frac{\partial h}{\partial t}+4\pi\frac{\partial i}{\partial t}\right)+\gamma\left(\mu_0\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+4\pi\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\right), \tag{12}$$

$$\frac{\partial i}{\partial t}=\beta(\varkappa h-i), \tag{13}$$

удовлетворяющее однородному краевому условию

$$h(r_0,\ t)=0 \tag{14}$$

и начальным условиям

$$h(r,\ 0)=H_0-H_1, \tag{15}$$

$$i(r,\ 0)=\varkappa(H_0-H_1), \tag{16}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(r,\ 0)=0. \tag{17}$$

Магнитный поток через поперечное сечение цилиндра дается формулой

$$\Phi(t)=\Phi_0+2\pi\int_0^{r_0}(\mu_0 h+4\pi i)\,r\,dr, \tag{18}$$

где

$$\Phi_0=\pi r_0^2\mu H_1 \tag{19}$$

предельное значение при $t\to\infty$ магнитного потока. Из физических соображений ясно, что

$$\begin{aligned}&\Phi(t)-\Phi_0>0 \quad \text{при} \quad H_0>H_1\\ &\Phi(t)-\Phi_0<0 \quad \text{при} \quad H_0<H_1.\end{aligned} \tag{20}$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение поставленной в п. 1 задачи естественно искать методом разделения переменных. Найдем сначала частные решения уравнений (12) и (13) при однородном краевом условии (14), полагая

$$\left.\begin{aligned}h(r,\ t)&=R(r)\,f(t)\\ i(r,\ t)&=R(r)\,\varphi(t)\end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (12) и (13) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}=\frac{\alpha(\mu^0\dot f+4\pi\dot\varphi)+\gamma(\mu_0\ddot f+4\pi\ddot\varphi)}{f}=-\lambda,$$

$$\dot\varphi=\beta(\varkappa f-\varphi),$$

где λ — параметр разделения. Отсюда следуют уравнения

$$\frac{1}{r}(rR')'+\lambda R=0 \quad \text{или} \quad R''+\frac{1}{r}R'+\lambda R=0 \tag{22}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\lambda f+\alpha\mu_0\dot f+\gamma\mu_0\ddot f+4\pi\alpha\dot\varphi+4\pi\gamma\ddot\varphi&=0\\ -\beta\varkappa f+\dot\varphi+\beta\varphi&=0\end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Решая уравнение (22) при краевых условиях

$$R(r_0)=0, \quad R(0)<\infty,$$

находим собственные значения

$$\lambda_m=\left(\frac{\nu_m}{r_0}\right)^2,$$

где ν_m — корни уравнения

$$J_0(\nu)=0.$$

Каждому λ_m соответствует собственная функция

$$R_m(r)=J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right),$$

норма которой равна

$$\int_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right) r\,dr=\frac{r_0^2}{2}J_1^2(\nu_m).$$

Каждому λ_m соответствует решение (f_m, φ_m) уравнений (23). Будем искать $f_m(t)$ и $\varphi_m(t)$ в виде

$$f_m(t)=a_m e^{kt}, \quad \varphi_m(t)=b_m e^{kt}. \tag{24}$$

Подставляя (24) и (23), получаем

$$\begin{gathered}(\lambda_m+\alpha\mu_0 k+\gamma\mu_0 k^2)\,a_m+(4\pi a k+4\pi\gamma k^2)\,b_m=0,\\ -\beta\varkappa a_m+(\beta+k)\,b_m=0.\end{gathered} \tag{25}$$

Условие разрешимости этой однородной системы

$$\begin{vmatrix}\lambda_m+\alpha\mu_0 k+\gamma\mu_0 k^2 & 4\pi a k+4\pi\gamma k^2\\ -\beta\varkappa & \beta+k\end{vmatrix}=0$$

приводит нас к кубическому уравнению для определения характеристических чисел k:

$$\gamma\mu_0 k^3+(\beta\gamma\mu+\alpha\mu_0)\,k^2+(\alpha\beta\mu+\lambda_m)\,k+\beta\lambda_m=0. \tag{26}$$

Покажем, что все корни характеристического уравнения (26) имеют отрицательную действительную часть. Для этого воспользуемся известной теоремой Гурвица, согласно которой необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена

$$f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$$

является положительность всех определений

$$\Delta_1=a_1, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & 1\\ a_3 & a_2\end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 0\\ a_3 & a_2 & 0\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix}, \ldots \Delta_n=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & \ldots & 0\\ a_3 & a_2 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & a_n\end{vmatrix}.$$

В нашем случае

$$f(z)=z^3+A_2 z^2+A_1 z+A_0,$$

где

$$A_2=\frac{\alpha\mu_0+\beta\gamma\mu}{\gamma\mu_0}, \quad A_1=\frac{\lambda_m+\alpha\beta\mu}{\gamma\mu_0}, \quad A_0=\frac{\beta\lambda_m}{\gamma\mu_0}.$$

Вычисления дают

$$\Delta_1 = A_1 > 0,$$
$$\Delta_2 = \frac{1}{(\gamma\mu_0)^2}\left[\beta\gamma\lambda_m(\mu-\mu_0)+\alpha\beta\mu(\alpha\mu_0+\beta\gamma\mu)+\alpha\mu_0\lambda_m\right] > 0,$$
$$\Delta_3 = \frac{\beta\lambda_m}{\gamma\mu_0}\Delta_2 > 0.$$

В частном случае чистого магнитного диэлектрика ($\sigma = 0$ и, следовательно, $\alpha = 0$) будем иметь

$$\gamma\mu_0 k^3 + \beta\gamma\mu k^2 + \lambda_m k + \beta\lambda_m = 0$$

и

$$\Delta_1 = \frac{\beta\mu}{\mu_0} > 0, \quad \Delta_2 = \frac{\beta\lambda_m}{\gamma\mu_0^2}(\mu-\mu_0), \quad \Delta_3 = \frac{\beta\lambda_m}{\gamma\mu_0}\Delta_2 > 0.$$

Таким образом, при всех значениях параметров α и γ решение задачи (12) — (17) носит затухающий характер:

$$h(r, t) \to 0, \quad i(r, t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

т. е. существует стационарный режим, соответствующий предельному полю H_1.

Пусть k_{1m}, k_{2m}, k_{3m} — корни кубического уравнения (26). Общие решения уравнений (23), очевидно, будут иметь вид

$$\begin{aligned} f_m(t) &= a_{1m}e^{k_{1m}t} + a_{2m}e^{k_{2m}t} + a_{3m}e^{k_{3m}t},\\ \varphi_m(t) &= b_{1m}e^{k_{1m}t} + b_{2m}e^{k_{2m}t} + b_{3m}e^{k_{3m}t}, \end{aligned} \tag{27}$$

а общее решение нашей задачи представится в виде бесконечных рядов, слагаемые которых имеют вид

$$f_m(t)\,J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right) \quad \text{и} \quad \varphi_m(t)\,J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right).$$

При решении уравнения (26) для заданного λ_m возможны два случая.

А. Один корень вещественный и два корня комплексные:

$$k_1 = -q_1,$$
$$k_2 = -q_2 + jp,$$
$$k_3 = -q_2 - jp,$$

причем

$$q_1 > 0, \; q_2 > 0, \; j = \sqrt{-1}.$$

Соответствующие решения уравнений (23) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_m(t) &= a_{1m}e^{-q_{1m}t} + e^{-q_{2m}t}(a'_{2m}\cos p_m t + a'_{3m}\sin p_m t),\\ \varphi_m(t) &= b_{1m}e^{-q_{1m}t} + e^{-q_{2m}t}(b'_{2m}\cos p_m t + b'_{3m}\sin p_m t), \end{aligned} \tag{28}$$

где a'_{2m}, a'_{3m}, b'_{2m}, b'_{3m} — некоторые коэффициенты.

Б. Все три корня являются вещественными и отрицательными числами

$$k_1 = -q_1,$$
$$k_2 = -q_2,$$
$$k_3 = -q_3,$$

так что

$$
\begin{aligned}
f_m(t) &= a_{1m}e^{-q_{1m}t} + a_{2m}e^{-q_{2m}t} + a_{3m}e^{-q_{3m}t}, \\
\varphi_m(t) &= b_{1m}e^{-q_{1m}t} + b_{2m}e^{-q_{2m}t} + b_{3m}e^{-q_{3m}t}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Для определения коэффициентов a_{im} и b_{im} следует воспользоваться начальными условиями (15), (16) и (17), которые дают:

$$
\begin{aligned}
f_m(0) &= c_m, \\
\varphi_m(0) &= \varkappa c_m, \\
f_m(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{30}
$$

где c_m — коэффициенты разложения

$$H_0 - H_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right),$$

равные

$$c_m = \frac{(H_0 - H_1)\int\limits_0^{r_0} J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right) r\,dr}{\int\limits_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right) r\,dr},$$

или

$$c_m = \frac{2(H_0 - H_1)}{\nu_m J_1(\nu_m)}, \tag{31}$$

так как

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^{r_0} J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right) r\,dr = \frac{r_0^2}{\nu_m^2}\int\limits_0^{\nu_m} J_0(\xi)\,\xi\,d\xi = \frac{r_0^2}{\nu_m^2} J_1(\nu_m), \\
&\int\limits_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right) r\,dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\nu_m).
\end{aligned}
$$

Величина магнитной индукции выражается рядом

$$B = \mu H_1 + \mu_0 h + 4\pi i = \mu H_1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(d_{1m}e^{k_{1m}t} + d_{2m}e^{k_{2m}t} + d_{3m}e^{k_{3m}t}\right), \tag{32}$$

где

$$d_{lm} = \mu_0 a_{lm} + 4\pi b_{lm} \quad (l = 1,\ 2,\ 3).$$

Из второго уравнения (25) находим

$$b_{lm} = \frac{\beta\varkappa}{\beta + k_{lm}} a_{lm} \qquad (l = 1,\ 2,\ 3), \tag{33}$$

так что

$$
\begin{aligned}
d_{1m} &= \frac{\beta\mu + k_{1m}\mu_0}{\beta + k_{1m}} a_{1m}, \\
d_{2m} &= \frac{\beta\mu + k_{2m}\mu_0}{\beta + k_{2m}} a_{2m}, \\
d_{3m} &= \frac{\beta\mu + k_{3m}\mu_0}{\beta + k_{3m}} a_{3m}.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Ограничимся вычислением лишь коэффициента d_{1m} или a_{1m}, пользуясь в обоих случаях А и Б формулами (27).

Подстановка (27) и (30) дает

$$a_{1m} + a_{2m} + a_{3m} = c_m, \tag{35}$$

$$b_{1m} + b_{2m} + b_{3m} = \varkappa c_m, \tag{36}$$

$$k_{1m} a_{1m} + k_{2m} a_{2m} + k_{3m} a_{3m} = 0. \tag{37}$$

Подставляя (33) в (36), получаем

$$\beta(\beta + k_{2m})(\beta + k_{3m}) a_{1m} + \beta(\beta + k_{1m})(\beta + k_{3m}) a_{2m} + \beta(\beta + k_{1m})(\beta + k_{2m}) a_{3m} = (\beta + k_{1m})(\beta + k_{2m})(\beta + k_{3m}) c_m. \tag{38}$$

Исключая из (35) и (37), (35) и (38) коэффициент a_{3m}, будем иметь

$$(k_{3m} - k_{1m}) a_{1m} + (k_{3m} - k_{2m}) a_{2m} = k_{3m} c_m,$$

$$\beta(\beta + k_{2m})(k_{3m} - k_{1m}) a_{1m} + \beta(\beta + k_{1m})(k_{3m} - k_{2m}) a_{2m} = (\beta + k_{1m})(\beta + k_{2m}) k_{3m} c_m.$$

Отсюда находим

$$a_{1m} = \frac{(\beta + k_{1m}) k_{2m} k_{3m}}{\beta(k_{3m} - k_{1m})(k_{2m} - k_{1m})} c_m \tag{39}$$

и затем

$$d_{1m} = \frac{(\beta\mu + k_{1m}\mu_0) k_{2m} k_{3m}}{\beta[k_{2m} k_{3m} - (k_{2m} + k_{3m}) k_{1m} + k_{1m}^2]} c_m. \tag{40}$$

Преобразуем полученную формулу, исключив отсюда k_{2m} и k_{3m}, для чего воспользуемся соотношениями, существующими между корнями уравнения:

$$k^3 + A_2 k^2 + A_1 k + A_0 = 0,$$

а именно

$$k_1 + k_2 + k_3 = -A_2, \tag{41}$$

$$k_1 k_2 k_3 = -A_0, \tag{42}$$

где

$$A_2 = \frac{\alpha\mu_0 + \beta\gamma\mu}{\gamma\mu_0}, \quad A_1 = \frac{\lambda_m + \alpha\beta\mu}{\gamma\mu_0}, \quad A_0 = \frac{\beta\lambda_m}{\gamma\mu_0}. \tag{43}$$

Определяя из (41) и (42)

$$k_2 + k_3 = -A_2 - k_1$$

$$k_2 k_3 = -\frac{A_0}{k_1},$$

подставляя эти выражения в (40) и учитывая, что $k_{1m} = -q_{1m} < 0$, получаем

$$d_{1m} = \frac{(\beta\mu - q_{1m}\mu_0) A_0}{\beta(2q_{1m}^3 - A_2 q_{1m} + A_0)} c_m. \tag{44}$$

Заменяя, наконец, A_2 и A_0, согласно (43), будем иметь

$$d_{1m} = \frac{(\beta\mu - q_{1m}\mu_0)\lambda_m c_m}{2\gamma\mu_0 q_{1m}^3 - (\beta\gamma\mu + \alpha\mu_0) q_{1m}^2 + \beta\lambda_m q_{1m}}. \tag{45}$$

Нетрудно убедиться в том, что коэффициенты k_{l_m} возрастают с ростом λ_m.

Пусть $k_{11} = -q_{11}$ — наименьший по величине корень кубического уравнения (26). Тогда, начиная с некоторого момента, должен наступить регулярный режим, при котором среди членов ряда (32) доминирующим будет член $d_{11}e^{-q_{11}t}J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right)$, так что можно написать

$$B=\mu H_1+d_{11}e^{-q_{11}t}J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right)+\ldots,$$

где точками обозначены слагаемые, более быстро убывающие по сравнению с первым членом при $t\to\infty$.

Полный поток магнитной индукции через поперечное сечение равен

$$\Phi(t)=\Phi_0+\Phi_1e^{-q_{11}t},$$

где

$$\Phi_0=\pi r_0^2\mu H_1,\ \Phi_1=\frac{2\pi r_0^2J_1(\nu_1)}{\nu_1}d_{11},$$

а d_{11} определяется формулой (45).

Снимая график зависимости

$$y(t)=\ln|\Phi(t)-\Phi_0|=\ln|\Phi_1|-q_{11}t$$

на регулярном режиме, мы определим показатель q_{11} как угловой коэффициент прямой $y=y(t)$ и величину $\ln|\Phi_1|$ как отрезок, отсекаемый на оси ординат прямой $y=y(t)$.

Величина Φ_0 находится, очевидно, по измерениям в заключительной стадии процесса как предельное значение потока индукции

$$\Phi_0=\lim_{t\to\infty}\Phi(t).$$

Зная Φ_0, мы вычислим

$$\mu=\frac{\Phi_0}{\pi r_0^2H_1}.$$

Покажем теперь, что можно определить коэффициенты β и $\varkappa$, если известны величины μ, Φ_1 и q_{11}.

В самом деле, из формулы

$$\Phi_1=\frac{2\pi r_0^2J_1(\nu_1)}{\nu_1}d_{11},$$

где

$$d_{11}=\frac{(\beta\mu-q_{11}\mu_0)\lambda_1c_1}{2\gamma\mu_0q_{11}^3-(\beta\gamma\mu+\alpha\mu_0)q_{11}^2+\beta\lambda_1q_{11}}$$

и уравнения

$$-\gamma\mu_0q_{11}^3+(\beta\gamma\mu+\alpha\mu_0)q_{11}^2-(\lambda_1+\alpha\beta\mu)q_{11}+\beta\lambda_1=0$$

получаем два уравнения для определения β и μ_0

$$\begin{aligned}&\beta(\lambda_1-\alpha\mu q_{11}+\gamma\mu q_{11}^2)+\mu_0(\alpha q_{11}^2-\gamma q_{11}^3)=\lambda_1q_{11}\\&\beta[(\lambda_1q_{11}-\gamma\mu q_{11}^2)\psi-\mu]+\mu_0[(2\gamma q_{11}^3-\alpha q_{11}^2)+q_{11}]=0,\end{aligned}\tag{46}$$

где

$$\psi=\frac{\Phi_1\nu_1}{\lambda_1c_1\cdot2\pi r_0^2J_1(\nu_1)}=\frac{\Phi_1}{4\pi(H_0-H_1)}.\tag{47}$$

Отсюда находим

1) коэффициент вязкости

$$\beta=\frac{D_1}{D_0};\tag{48}$$

2) коэффициент вязкой магнитной восприимчивости

$$\varkappa = \frac{\mu - \mu_0}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(\mu - \frac{D_2}{D_0}\right), \tag{49}$$

где

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \lambda_1 + [\gamma^2\mu\, q_{11}^3 - 2\alpha\gamma\mu q_{11}^2 + (\alpha^2\mu + 3\gamma\lambda_1)\, q_{11} - 2\alpha\lambda_1]\, q_{11}\psi \\ D_1 &= [1 + (2\gamma q_{11}^2 - \alpha q_{11})\,\psi]\,\lambda_1 q_{11} \\ D_2 &= [\mu + (\gamma\mu q_{11}^2 - \lambda_1)\,\psi]\,\lambda_1 \\ \lambda_1 &= \frac{\nu_1^2}{r_0^2} = \frac{5{,}783}{r_0^2} \qquad (\nu_1 = 2{,}4048) \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

Напомним, что $\alpha = \frac{4\pi\sigma}{c^2}$, $\gamma = \frac{\varepsilon}{c^2}$.

Зная μ, q_{11} и Φ, т. е. ψ, найдем по формулам (48) и (49) величины β и $\varkappa$.

В случае чистого магнитного диэлектрика ($\sigma = 0$, $\alpha = 0$) формулы (50) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \lambda_1 + (\gamma^2\mu q_{11}^4 + 3\gamma\lambda q_{11}^2)\,\psi \\ D_1 &= (1 + 2\gamma q_{11}^2\psi)\,\lambda_1 q_{11} \\ D_2 &= (\mu + \gamma\mu q_{11}^2)\,\lambda_1 \end{aligned}\right\}. \tag{51}$$

Для проводящего цилиндра, пренебрегая токами смещения, т. е. полагая формально $\gamma = 0$, находим

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \lambda_1 - 2\alpha\lambda_1 q_{11}\psi + \alpha^2\mu q_{11}^2 \\ D_1 &= \lambda_1 q_{11}(1 - \alpha q_{11}\psi) \\ D_2 &= \lambda_1(\mu - \lambda_1\psi) \end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

Поступила в редакцию
24.10. 1952 г.

Кафедра
математики

ЛИТЕРАТУРА

1. Введенский Б. А. Журнал Русского физико-химического общества, т. 55, 1923. См. также Тихонов А. Н. Проблемы электротехнического металла, сборн. статей под ред. В. К. Аркадьева, изд. ОТН АН СССР, 1938, стр. 80.
2. Телеснин Р. В. ЖЭТФ, т. 18, вып. 11, стр. 970, 1948.
3. Тихонов А. Н. ЖТФ, т. VII, стр. 38, 1937. Тихонов А. Н. Проблемы электротехнического металла, сборн. статей под ред. В. К. Аркадьева, изд. ОТН АН СССР, 1938, стр. 117.