В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 3 января 1950 г.

На заседании был заслушан обзорный доклад.

Б. М. Левитан. «О разложении по собственным функциям самосопряжённых дифференциальных уравнений второго порядка».

Заседание 14 февраля 1950 г.

1. Президент Общества П. С. Александров объявляет, что Правление присудило ежегодные премии Общества молодым математикам.

Премии присуждены:

Марку Иосифовичу Вишику за работу «Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений», доложенную Обществу 15 февраля 1949 г.

Игорю Ростиславовичу Шафаревичу за работу «Общий закон взаимности», доложенную Обществу 30 марта 1948 г.

2. К. А. Ситников. «О непрерывных отображениях евклидова пространства».

Содержание доклада (под тем же заглавием) печатается в Докладах Академии Наук СССР; оно состоит в доказательстве следующей теоремы:

Если при непрерывном отображении f евклидова n-мерного пространства R^n в себя прообразы всех точек имеют равномерно ограниченные диаметры, то образ $f(R^n)$ есть открытое в R^n множество, все группы Бетти которого суть нуль-группы. Весьма частный случай этой теоремы был ранее доказан польским математиком К. Борсуком.

3. А. Ф. Тиман (Днепропетровск). «Квазигладкие функции».

1. Функцию $f(x)$, непрерывную на $[a, b]$, мы называем квазигладкой на этом сегменте, если существует константа M такая, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$\left| f(x_1) - 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f(x_2) \right| \leqslant M\,|x_1 - x_2|. \tag{1}$$

Квазигладкие функции можно, с одной стороны, рассматривать как обобщение гладких функций, впервые изучавшихся Риманом, и, с другой стороны, как обобщение функций, удовлетворяющих условию Липшица. В 1945 г. Зигмунд показал, что класс квазигладких функций в целом ряде вопросов (теория сопряжённых функций, наилучшие приближения, дробное дифференцирование и интегрирование, тригонометрические ряды) в известном смысле является более естественным, чем класс функций, удовлетворяющих условию Липшица. Известно, что квазигладкие функции могут оказаться не дифференцируемыми ни в одной точке. Возникает вопрос о природе их модуля непрерывности. Он представляет известный интерес и точнее может быть формулирован следующим образом: пусть

$$\omega^*(h) = \sup_{f \in \Lambda^*(a,b)M} \omega(f; h) = \sup_{f \in \Lambda^*(a,b)M} \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant h} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

где $\Lambda^*(a, b)\,M$ есть класс квазигладких на $[a, b]$ функций с константой M. Каково асимптотическое поведение $\omega^*(h)$ при $h \to 0$? В этом направлении Зигмунд, пользуясь полученной им теоремой о наилучшем приближении квазигладких периодических функций и известной теоремой С. Н. Бернштейна, установил, что всякая периодическая периода 2π функция, квазигладкая на всей вещественной оси, имеет модуль непрерывности

$$\omega(f; h) = O\left(h \ln \frac{1}{h}\right). \tag{2}$$

Таким образом, приведённый результат Зигмунда в некоторых случаях даёт лишь порядок убывания модуля непрерывности при $h \to 0$. Кроме того, надо учесть следующие два обстоятельства. Во-первых, всегда можно указать функцию $f(x)$, квазигладкую на данном сегменте $[a, b]$, но теряющую это свойство после её периодического продолжения. Во-вторых, переход от непериодических функций к периодическим, как это делается в других случаях (например, в случае функций $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$,) путём замены $x = \cos t$, здесь нарушает симметрию в расположении трёх точек, входящих в условие (1).

В настоящей работе мы даём исчерпывающее решение формулированной выше задачи. При этом, поскольку и модуль непрерывности и модуль гладкости суть понятия структурные, мы находим целесообразным проводить исследование лишь в структурных терминах, не прибегая, например, к терминам конструктивной теории функций.

2. Основным результатом работы является равенство

$$\omega^*(h) = \frac{M}{\ln 2} h \ln \frac{1}{h} + O(h), \qquad h \to 0, \tag{3}$$

которое вытекает из теоремы 3 (см. ниже).

В процессе получения этого результата мы устанавливаем следующие предложения.

Лемма 1. *Всякая функция $f(x)$, принадлежащая классу $\Lambda^*(a, b)\,M$ и принимающая значение, равное нулю в концах сегмента $[a, b]$, удовлетворяет неравенству*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \leqslant \frac{2}{3}(b-a)\,M. \tag{4}$$

Лемма 2. *Всякая функция $f(x)$, принадлежащая классу $\Lambda^*(a, b)\,M$ и принимающая значение, равное нулю в концах сегмента $[a, b]$, удовлетворяет неравенству*

$$|f(x)| \leqslant \varphi_1^*(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $\varphi_1^*(x) = \frac{1}{2}(b-a)\,M\varphi_1\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$, *а*

$$\varphi_1(y) = \begin{cases} 1 & y = 0 \\ (n+1)\,y + \dfrac{3 \cdot 2^{n+1} + 1}{3 \cdot 2^{n+1}} & y \in \left[\dfrac{1}{3 \cdot 2^{n+2}}, \dfrac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}\right], \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \\ \dfrac{4}{3} & \dfrac{1}{6} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{3} \\ -(n+1)\,y + \dfrac{3(n+1)\,2^{n-1} + 1}{3 \cdot 2^{n-1}} & y \in \left[\dfrac{3 \cdot 2^{n-1} - 1}{3 \cdot 2^{n-1}}, \dfrac{3 \cdot 2^{n} - 1}{3 \cdot 2^{n}}\right], \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \\ 0 & y = 1 \\ \varphi_1(-y) & -1 \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda_1^*(a, b)\,M$ *есть подкласс функций* $f(x) \in \Lambda^*(a, b)\,M$, *принимающих значение, равное нулю в концах сегмента* $[a, b]$ *и по абсолютной величине не превышающих* $\frac{1}{2}(b-a)\,M$. *Пусть, далее, для всех* $x \in [a, b]$

$$\varphi_2^*(x) = \frac{1}{2}(b-a)\,M\varphi_2\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),$$

где

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} -ny + \dfrac{n2^n+1}{2^n} & y \in \left[\dfrac{2^n-1}{2^n}, \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right], \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \\ 0 & y = 1 \\ \varphi_2(-y) & -1 \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $\varphi_2^*(x) \in \Lambda_1^*(a, b)\,M$ *и в каждой точке* $x \in [a, b]$

$$\sup_{f \in \Lambda_1^*(a,\, b)\, M} |f(x)| = \varphi_2^*(x). \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть* Λ_0^* *есть класс всех непрерывных на* $[a, b]$ *функций, удовлетворяющих на этом сегменте условию* (1) *и принимающих значение, разное нулю на его концах. Тогда для всех* $x \in [a, b]$

$$\varphi(x) = \sup_{f \in \Lambda_0^*} |f(x)| = \frac{M}{\ln 2}(c - |x-d|)\ln\frac{c}{c-|x-d|} + \theta(x)(c-|x-d|), \tag{6}$$

где

$$c = \frac{b-a}{2}, \quad d = \frac{b+a}{2}, \quad 0 \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{8}{3}cM.$$

Пользуясь этими результатами, мы получаем полное решение формулированной в п. 1 задачи и доказываем основную теорему настоящей работы.

Теорема 3. *Для всякой непрерывной на* $[a, b]$ *функции* $f(x)$, *удовлетворяющей условию* (1), *при* $0 \leqslant h \leqslant \frac{b-a}{4}$, *справедливо неравенство*

$$\omega(f;\, h) \leqslant \frac{M}{\ln 2}\, h \ln\frac{1}{h} + Ah, \tag{7}$$

где

$$A = \frac{4}{3}(b-a)\,M + \frac{4\max\limits_{x}|f(x)|}{b-a} + \frac{M}{\ln 2}\ln\frac{b-a}{2}.$$

При этом константа $\frac{M}{\ln 2}$ *в правой части* (7) *не может быть понижена. Существует функция, удовлетворяющая условиям теоремы и обращающая неравенство* (7) *в асимптотическое равенство.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1]. A. Zygmund, Duke. Math. Journal, V, 12 (1945), 47—76.

4. З. И. Козлова (Сталинград). «О накрытиях A-множеств и расщеплениях B-множеств».

Множество принадлежит *абсолютно первому классу*, если оно на каждом компактном множестве имеет точку локальной компактности [1]. В этом случае данное множество можно представить как трансфинитную сумму компактных множеств, где каждое слагаемое отделимо множеством нулевого класса от суммы всех последующих. Минимальная длина такой суммы называется *подклассом* данного множества.

В бэровском пространстве произведений $I_{xy}=I_x\times I_y$ рассматриваются плоские A-множества $\mathscr{E}$, обладающие тем свойством, что все множества вида $P_x\cdot\mathscr{E}$ абсолютно первого класса подкласса $<\alpha$, где $\alpha<\Omega$ (P_x обозначает множество всех точек пространства I_{xy} с постоянной абсциссой x). Доказано, что всякое A-множество $\mathscr{E}\subset I_{xy}$ указанного типа может быть накрыто B-множеством H (т. е. $H\supset\mathscr{E}$) таким, что все множества $H\cdot P_x$ — также абсолютно первого класса подкласса $<\alpha$.

Эта теорема допускает следующее обобщение: вместо множества абсолютно первого класса можно рассматривать такие множества, которые разлагаются в трансфинитную сумму подмножеств, обладающих компактным замыканием, причём каждое слагаемое отделимо от суммы всех последующих множеством нулевого класса.

Для плоских B-множеств H, для которых каждое из множеств $P_x\cdot H$ является множеством абсолютно первого класса подкласса $<\alpha$, где $\alpha<\Omega$, существует разложение вида

$$H=\sum_{\xi<\alpha} H_\xi,$$

где $H_{\xi'}\cdot H'_\xi=0$ при $\xi\neq\xi'$, каждое из слагаемых H_ξ есть B-множество, каждое из множеств $P_x\cdot H_\xi$ компактно и $\sum\limits_{\xi<\alpha} P_x\cdot H_\xi$ такова, что каждое из слагаемых отделимо от суммы всех последующих множеством нулевого класса относительно P_x.

Приводимые результаты являются естественным продолжением работ по изучению накрытий A-множеств и расщеплению B-множеств Н. Н. Лузина [2], В. И. Гливенко [3], П. С. Новикова [4] и автора [5].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1]. И. В. Проскуряков, О некоторых свойствах локально-компактных и локально-бикомпактных пространств, Учёные записки МГУ, математика, **XXX**, 3 (1939).

[2]. N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930.

[3]. В. И. Гливенко, О неявных функциях, Матем. сборник, **XXXVI** (1929), 138 — 142.

[4]. П. С. Новиков, Об одном свойстве аналитических множеств, ДАН СССР **II**, № 5 (1934), 273 — 276.

[5]. З. И. Козлова, О некоторых плоских A- и B-множествах, Известия Академии Наук СССР, **4** (1940), 479 — 500.

Заседание 21 февраля 1950 г.

1. Л. А. Скорняков. «Альтернативные тела и альтернативные плоскости».

Под *телом* K понимается множество с двумя операциями: сложением и умножением, причём имеют место оба дистрибутивных закона. Кроме того, предполагается, что по сложению K образует абелеву группу, а уравнения $ax=b$, $xa=b$, $a\neq 0$, однозначно разрешимы относительно x. Важным частным случаем таких неассоциативных тел являются *альтернативные тела*, т. е. тела, умножение которых подчинено условиям: $(ab)\,b=ab^2$, $b\,(ba)=b^2a$. Альтернативные тела обладают единственной единицей и единственным обратным для каждого ненулевого элемента. Ранее было доказано (Schafer, Bull. of the Am. Math. Soc., **49** (1943), 549 — 555), что всякое неассоциативное альтернативное тело конечного ранга над своим центром является телом Кэли-Диксона (см. вышеупомянутую работу Шафе́ра. Частный случай тела Кэли-Диксона указан в статье Линника, УМН, т. IV, вып. 5 (1949), 49 — 98). Автором доказана следующая теорема, полностью описывающая структуру альтернативных тел.

Всякое альтернативное тело или ассоциативно, или является телом Кэли-Диксона над своим центром.

В частности, показано, что *всякое альтернативное тело характеристики* 2 *ассоциативно.*

Таким образом, оказывается, что *не существует неассоциативных альтернативных тел конечного ранга.*

Так как возможность координатизировать некоторую проективную плоскость с помощью альтернативного тела равносильна выполнению в ней малой теоремы Дезарга, то полученный результат даёт возможность решить проблему Холла (Hall, Trans. of the Am. Math. Soc., 54 (1943), 229 – 277, Скорняков, Изв. АН СССР (серия математ.), 13 (1949), 447 – 472), доказав, что *альтернативная плоскость транзитивна относительно четырёхвершинников и все альтернативные тела, координатизирующие её, изоморфны между собой.*

Далее автором рассмотрены *полуальтернативные тела*, т. е. такие, где справедливо только одно из соотношений альтернативности, и доказано, что *всякое полуальтерное тело характеристики* $\neq 2$ *альтернативно.* Ранее этот результат был получен только для тел конечного ранга, характеристика которых равна нулю (Albert, Ann. of Math., 50 (1949), 318 – 328). Как и выше, из полученной теоремы извлекаются геометрические следствия, а именно, доказывается, что *если нигде в плоскости не имеет места теорема* 7_3 (Рашевский, Матем. сб., 8 (1940), 183—202), *то выполнение малой теоремы Дезарга вдоль двух прямых влечёт за собой её проективное выполнение, т. е. альтернативность плоскости.*

2. И. З. Розенкноп. «Некоторые свойства системы замкнутых путей в цепях Маркова».

Рассматривается схема конечной цепи Маркова, состоящая из n точек и стрелок, соединяющих некоторые пары из них. Пусть $(e_{\gamma 0}, e_{\gamma 1}, \ldots, e_{\gamma k})$—совокупность точек $e_{\gamma 0}, e_{\gamma 1}, \ldots, e_{\gamma k}$ со стрелками $(e_{\gamma 0}, e_{\gamma 1})$, $(e_{\gamma 1}, e_{\gamma 2})$, $\ldots$, $(e_{\gamma k-1}, e_{\gamma k})$. Замкнутый путь, или цикл,—путь, где имеется стрелка $(e_{\gamma k}, e_{\gamma 0})$. Каждому пути схемы $(e_{\gamma 0}, \ldots, e_{\gamma k})$ сопоставляется вектор n-мерного пространства с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$(e_{\gamma 0}, e_{\gamma 1}, \ldots, e_{\gamma k}) \to \sum_{i=0}^{k} e_{\gamma i}.$$

При этом векторы, соответствующие циклам, и их линейные комбинации с действительными коэффициентами образуют подпространство $L \subseteq R^{(n)}$, а линейные комбинации с целыми коэффициентами—подрешётку Z решётки $Z^{(n)}$, образованной векторами $e_1, \ldots, e_n$.

Вводится понятие цепочки существенных (т. е. принадлежащих хотя бы одному циклу) стрелок как последовательности стрелок $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_k$, в которой для любого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{a}_{i+1}$ имеют общее начало или общий конец. Наконец, классом стрелок называется такая их совокупность, что любые две стрелки из неё принадлежат одной цепочке.

Между размерностью r подпространства циклических векторов L, числом s классов стрелок данной системы и общим числом n точек для случая связной системы (т. е. такой, что любые две точки могут быть соединены некоторым путём) существует зависимость:

$s + r = n + 1$ (теорема I), а для произвольной системы:

$s + r = n - l + k$ (теорема I а), где l—число несущественных точек, а k—число классов связности существенных точек.

Обозначим через $K^+(e_i)$ и через $K^-(e_i)$ классы стрелок, содержащие стрелки, соответственно выходящие из e_i и входящие в e_i. Пусть $g = (e_{\gamma 0}, \ldots, e_{\gamma k})$—путь, все стрелки которого существенные. Тогда из того, что $g \in L$, следует, что $K^+(e_{\gamma k}) = K^-(e_{\gamma 0})$ (теорема IIa). Если же, наоборот, $K^+(e_{\gamma k}) = K^-(e_{\gamma 0})$, то $g \in Z$ (теорема IIb). С помощью этих теорем доказывается высказанное А. Н. Колмогоровым утверждение, что $Z = Z^{(n)} \cap L$ (теорема III).

Заседание 28 февраля 1950 г.

1. П. С. Александров оглашает текст приветствия почётному члену Общества Сергею Натановичу Бернштейну ко дню его 70-летия.

2. Л. С. Понтрягин. «Топологическая классификация отображений $(n+2)$-мерной сферы в n-мерную».

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР, том LXX, № 6 (1950), 957.

3. А. А. Самарский. «О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объёмов».

I. Пусть T—некоторый замкнутый объём с достаточно гладкой границей Γ (удовлетворяющей, например, условиям Ляпунова).

Рассмотрим следующую задачу о собственных значениях:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } T, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma \tag{1}$$

при дополнительном условии закрепления

$$u = 0 \quad \text{на } E, \tag{2}$$

где E—некоторое множество, целиком лежащее внутри T.

Поставим следующие вопросы:

1) Существуют ли множества E, при закреплении по которым собственные частоты λ_k не меняются? Какова структура этих множеств?

2) Как изменяются собственные частоты при закреплении по малой области?

Аналогичные вопросы в разное время возникали при попытке написания уравнения Шредингера для идеального одноатомного газа (Эренфест [1]), при изучении колебаний мембраны (Витт и Шубин [2]) и др. Особый интерес эти вопросы приобретают в настоящее время в связи с изучением электромагнитных колебаний в эндовибраторах, возбуждаемых тонкими проводниками с током.

В настоящей работе исследована проблема закрепления замкнутых объёмов произвольного числа измерений и 1) показано, что характеристикой множества E относительно закрепления является ёмкость множества E, 2) установлен наиболее широкий класс множеств (множества ёмкости нуль), при закреплении по которым собственные частоты не меняются, 3) вычислены поправки для собственных частот при закреплении по малым областям.

II. Обозначим через T_e дополнение E до T; область T_e мы аппроксимируем последовательностью областей τ_n с границами ε_n и Γ.

Ёмкостью множества E относительно Γ мы назовём величину

$$c(E, \Gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial S^0}{\partial \nu} d\sigma,$$

где Σ—любая гладкая поверхность, содержащая E, S^0—«функция среза», определяемая условиями:

$$S^0 = \lim_{n \to \infty} S_n^0, \quad \Delta S_n^0 = 0 \text{ в } \tau_n, \quad S_n^0 = 0 \text{ на } \Gamma, \quad S_n^0 = 1 \text{ на } \varepsilon_n.$$

Можно показать, что закрепление по множеству ёмкости нуль не является характерным для уравнения (1) и всегда связано с закреплением по множеству положительной ёмкости. Поэтому целесообразно пользоваться следующими определениями:

1. Назовём δ-закреплением по множеству E закрепление по области, содержащейся в δ-окрестности U_E^{δ} множества E ($\delta > 0$—любое сколь угодно малое число).

2. Назовём $\hat{\lambda}_k$ «собственным значением для квазизакрепления по множеству E», если $\hat{\lambda}_k$ является пределом при $\delta \to 0$ собственных значений λ_k^{δ}, соответствующих δ-закреплению по множеству E.

Заметим, что: а) мы ничего не предполагаем относительно площади поверхности, являющейся границей области закрепления, б) предельные значения $\hat{\lambda}_k$ могут и не соответствовать реальному закреплению.

III. Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах:

Теорема 1. *При квазизакреплении основной области T по множеству ёмкости нуль собственные значения уравнения $\Delta u + \lambda^0 u = 0$ при $u = 0$ на Γ остаются неизменными.*

Теорема 2. *Для того чтобы наименьшее собственное значение уравнения $\Delta u + \lambda^0 u = 0$ при $u = 0$ на Γ осталось неизменным при квазизакреплении основной области по множеству E, необходимо и достаточно, чтобы ёмкость множества E была равна нулю.*

Теорема 3. *При закреплении основной области T по множеству E малой ёмкости собственные значения λ_k^0 уравнения $\Delta u + \lambda^0 u = 0$ меняются на величину, имеющую порядок ёмкости множества E, точнее,*

$$\Delta\lambda_k \leqslant 4\pi\varkappa_k^2 c(E, \Gamma) + O(c^2(E, \Gamma)),$$

где $\varkappa_k$—максимальное значение k-й собственной функции u_k^0 на E.

При этом в случае $k > 1$ предполагается, что множество E является изолированным, т. е. его точки не лежат на узловых поверхностях собственной функции.

Доказательство основано на сведении краевой задачи (1)—(2) к вариационной задаче.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Ehrenfest, Die Naturwissenschaften, 15, H. 7 (1927); P. Ehrenfest и G. E. Ohlnbeck, Z. f. Physik, 41, 576 (1927); P. Ehrenfest, Die Naturwissenschaften, 15, H. 11 (1927).

[2] А. Витт и С. Шубин, ЖТФ, 1, в. 2—3 (1931).

4. Председательствующий А. Ф. Бермант сообщает, что только что получено известие о последовавшей несколько часов назад смерти одного из старейших и заслуженных членов и деятелей Общества — Николая Николаевича Лузина.

Собрание почтило память Николая Николаевича Лузина вставанием.

Заседание 7 марта 1950 г.

1. Председательствующий И. Г. Петровский сообщает, что произошло присуждение Сталинских премий 1949 года—яркое свидетельство заботы Советского правительства, партии и великого Сталина о науке.

Принимается предложение послать приветствия лауреатам-математикам— И. Н. Векуа, А. В. Погорелову и члену Общества В. З. Власову.

2. С. М. Никольский. «Наилучшие линейные методы приближения дифференцируемых функций многочленами».

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР, LXIX (1949), 129—132.

3. Н. М. Коробов. «Нормальные периодические системы и вопрос о суммах дробных долей».

Дробные доли всякой равномерно распределённой функции $f(x)$ удовлетворяют очевидному соотношению

$$\sum_{x=1}^{p}\{f(x)\}=\frac{p}{2}+o(p).$$

А. Я. Хинчин показал, что в случае линейной функции $f(x)=\alpha x$ для всех иррациональных α оценку

$$\sum_{x=1}^{p}\{\alpha x\}-\frac{p}{2}=o(p)$$

нельзя улучшить. Однако существуют иррациональные α такие, что

$$\sum_{x=1}^{p}\{\alpha x\}-\frac{p}{2}=O(\ln p), \tag{1}$$

причём улучшить оценку (1) нельзя уже ни для какого иррационального α. Наконец, почти для всех α

$$\sum_{x=1}^{p}\{\alpha x\}-\frac{p}{2}=\Omega(\ln p);\qquad \sum_{x=1}^{p}\{\alpha x\}-\frac{p}{2}=o(\ln^{1+\varepsilon}p),\quad (\varepsilon>0). \tag{2}$$

Рассмотрим аналогичные вопросы для показательной функции $f(x)=\alpha q^x$ при целом $q\geqslant 2$. Пусть L — множество тех α из интервала (0, 1), для которых функция αq^x равномерно распределена. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Какова бы ни была положительная функция* $\varepsilon(p)$, *для которой* $\lim\limits_{p\to\infty}\varepsilon(p)=0$, *найдётся* $\alpha\in L$ *такое, что*

$$\sum_{x=1}^{p}\{\alpha q^x\}-\frac{p}{2}=\Omega(p\cdot\varepsilon(p)).$$

Таким образом, для всех $\alpha\in L$ оценка

$$\sum_{x=1}^{p}\{\alpha q^x\}-\frac{p}{2}=o(p)$$

не может быть улучшена.

Теорема 2. *Для всякой функции* $\varphi(p)$, *как угодно медленно стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании* p, *найдётся* $\alpha\in L$ *такое, что*

$$\sum_{x=1}^{p}\{\alpha q^x\}-\frac{p}{2}=o(\varphi(p)). \tag{3}$$

Дальнейшее улучшение этой оценки (до $O(1)$) невозможно ни для какого $\alpha\in L$.

Используя результаты А. Я. Хинчина, легко показать, что почти для всех α порядок разности $\sum\limits_{x=1}^{p}\{\alpha q^x\}-\frac{p}{2}$ равен $\sqrt{p\ln\ln p}$ и, таким образом, значительно больше, чем для случая линейной функции (2).

Доказательства теорем основываются на соотношении

$$\sum_{x=1}^{p}\{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1}\sum_{x=1}^{p}\delta_x + O(1), \tag{4}$$

где δ_k — знаки q-ичного разложения α: $\alpha = 0,\delta_1\delta_2\ldots\delta_k$ $(0 \leqslant \delta_k \leqslant q-1)$. При доказательстве теоремы 1 используется следующая

Лемма. *Пусть целые* $k_1 < k_2 < \ldots$ *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{k_{2s}}{k_{2s-1}} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{s\to\infty}\frac{k_{2s+1}}{k_{2s}} = \infty.$$

Пусть, далее, для $\alpha = 0,\delta_1\ \delta_2\ldots\delta_k\ldots$ *функция* αq^x *равномерно распределена* $(\alpha \in L)$. *Выберем* δ_k' *произвольно для* $k_{2s-1} \leqslant k < k_{2s}$ *и* $\delta_k' = \delta_k$ *для* $k_{2s} \leqslant \delta_k < \cdot\, k_{2s+1}$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Тогда при $\alpha' = 0,\ \delta_1',\ \delta_2'\ldots\delta_k'\ldots$ *функция* $\alpha' q^x$ *также равномерно распределена.*

В силу леммы можно, не выводя α из множества L, так изменять знаки δ_k, что их сумма, а следовательно (4), и сумма дробных долей существенно меняются.

Доказательство теоремы 2 основывается на применении нормальных периодических систем $\rho_n(q)$. Рассмотрим n-значные разложения чисел $0, 1, \ldots, q^n - 1$ в q-ичной системе счисления:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \overbrace{0 \quad\quad 0\ \ldots\ 0 \quad\quad 0}^{n}, \\ 1 = 0 \quad\quad 0\ \ldots\ 0 \quad\quad 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q^n - 1 = q-1\ \ q-1\ \ldots\ q-1\ \ q-1. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Системой $\rho_n(q)$ называется последовательность из $\tau + n - 1$ знаков

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n}\ldots\delta_\tau \mid \delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}\ (\delta_\nu \text{ — целые; } 0 \leqslant \delta_k \leqslant q-1;\ \tau = q^n), \tag{6}$$

обладающая тем свойством, что n-значные числа

$$\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, q^n - 1)$ совпадают с совокупностью всех возможных n-значных чисел (5). Так, последовательности $00011101 \mid \underline{00}$ и $33001020311213223\underline{3}$ представляют собой примеры систем $\rho_3(2)$ и $\rho_2(4)$. Известен метод построения систем $\rho_n(q)$ для любых n и $q \geqslant 2$. Обозначим через ρ_n' совокупность первых τ знаков в (6). Пусть

$$\alpha = 0,\ \underbrace{\rho_1'\ldots\rho_1'}_{\psi(1)}\ldots\underbrace{\rho_n'\ldots\rho_n'}_{\psi(n)}$$

(здесь каждый знак каждого ρ_n' понимается как очередной знак q-ичного разложения α; $\psi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$). Тогда функция αq^x равномерно распределена. В силу (4), так как сумма знаков в ρ_n' равна $\frac{q-1}{2}q^n$, при $\psi\left(\sqrt{\ln\varphi(k)}\right) > k$ получаем утверждение теоремы 2.