

О СОПРОТИВЛЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ТОКОВ

А. А. Самарский и А. Н. Тихонов

Изучается вопрос о вычислении реактивной части сопротивления излучения линейного проводника (антенны), вдоль которого задано распределение тока. Установлено, что только для случая настроенного диполя величина реактанца конечна. Рассмотрен ряд примеров.

Введение

В настоящей работе изучается вопрос о вычислении сопротивления излучения линейного проводника (антенны); при этом предполагается заданным распределение тока вдоль проводника.

Нашей целью является доказательство того, что только для случая настроенного диполя¹ величина реактанца конечна.

В § 1 устанавливается справедливость сделанного утверждения для неограниченного пространства. Отсюда же следует справедливость его для любых объемов (для волноводов и эндовибраторов).

В § 2 и § 3 даются формулы величины реактанца полуволнового диполя в цилиндрическом радиоволноводе произвольной формы. В § 3 производится сравнение полученных выше формул с результатами работы Левина^[1], в которой проведено вычисление реактанца полуволнового диполя, расположенного вдоль оси круглого волновода. Даны соответствующие графические иллюстрации.

В § 4 рассматривается вопрос о сопротивлении излучения произвольно направленного диполя и в качестве примера проводится вычисление сопротивления излучения для полуволнового диполя, перпендикулярного оси прямоугольного волновода.

§ 1

Пусть в неограниченном пространстве находится прямолинейный проводник L длины $2l$, на котором задано распределение тока

$$I = I_0 f(s) e^{-i\omega t} \quad (f(s) \leq 1), \quad (1)$$

где s — длина дуги вдоль L ($-l \leq s \leq l$).

Нашей задачей является вычисление сопротивления излучения проводника L в предположении, что функция распределения тока $f(s)$ не имеет особенностей внутри проводника (дважды непрерывно дифференцируема).

¹ Под настроенным диполем мы понимаем линейный проводник длины $2l = n \frac{\lambda}{2}$ (n — целое число; λ — длина волны), на котором задано распределение тока:

$$I = I_0 f(s), \quad f(s) = \begin{cases} \cos ks, & \text{если } n \text{ — нечетно,} \\ \sin ks, & \text{если } n \text{ — четно.} \end{cases}$$

($-l \leq s \leq l$)

² Множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем не выписываем.

Электромагнитное поле, возбуждаемое током на L , определяется из а) уравнений Максвелла; в) условий возбуждения на токе, которые мы берем в виде

$$\oint_{K_s} H_s ds = \frac{4\pi}{c} I \quad (2)$$

(K_s — бесконечно малый контур, охватывающий проводник с током L) или, точнее, в виде

$$H_p \approx \frac{2I}{cp} \quad (2')$$

($p = \overline{MM_0}$, M_0 — точка на L , M — точка на контуре K_s), с) условий излучения на бесконечности, имеющих для неограниченного пространства форму известных условий Зоммерфельда [2].

Введем цилиндрическую систему координат, направив ось z вдоль тока L и проводя плоскость $z=0$ через его середину.

В этом случае электромагнитное поле находится по формулам

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{-ik} (\text{grad div } \vec{Z} + k^2 \vec{Z}) \quad \left(k = \frac{\omega}{c} \right) \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{Z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь \vec{Z} — вектор Герца, у которого лишь z — компонента отлична от нуля.

Функция Z может быть выражена следующим образом

$$Z(M, M_0; z) = \frac{4\pi}{c} I_0 \int_{-i}^i \Pi(M, M_0; z - \zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad (4)$$

где $\Pi(M, M_0; z - \zeta)$ — функция источника волнового уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$, имеющая для неограниченного пространства следующий простой вид

$$\Pi(M, M_0; z - \zeta) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (5)$$

где

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}, \quad \rho = \overline{MM_0}.$$

Найдем сопротивление излучения вибратора L , пользуясь основной в методе наведенных эдс формулой [4]

$$R = -\frac{1}{I_0^2} \int_{-i}^i E_z(M, M_0; z) I(z) dz. \quad (6)$$

Значение интеграла, стоящего в правой части, мы будем вычислять как предел интеграла

$$\int_{-i}^i E_z(M, M_0; z) I(z) dz$$

при $M \rightarrow M_0$. О возможности такого предельного перехода будет сказано ниже.

Из формул (3) имеем

$$\begin{aligned} E_z(M, M_0; z) &= \frac{1}{-ik} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 Z \right) = \\ &= \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} \int_{-l}^l \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi(M, M_0; z - \zeta) \right] f(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

Пользуясь тем, что $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \zeta^2}$ и интегрируя в дальнейшем по частям, получим

$$\begin{aligned} E_z(M, M_0; z) &= \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} \int_{-l}^l \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \zeta^2} + k^2 \Pi \right) f(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} \left\{ \Pi(M, M_0; l+z) f'(-l) - \Pi(M, M_0; l-z) f'(l) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-l}^l \Pi(M, M_0; z - \zeta) [f''(\zeta) + k^2 f(\zeta)] d\zeta \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Это преобразование не вызывает сомнения, если $f'(\zeta)$ непрерывна.

Рассмотрим настроенный диполь, длина которого $2l = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}$, где n — целое число, λ — длина волны. В этом случае функция распределения тока удовлетворяет уравнению

$$F(\zeta) = f''(\zeta) + k^2 f(\zeta) = 0, \quad (9)$$

причем

$$f(\pm l) = 0.$$

Поэтому интеграл в предыдущей формуле обращается в нуль.

Таким образом, для настроенного диполя будем иметь

$$\begin{aligned} E_z(M, M_0; z) &= \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} \left\{ \Pi(M, M_0; l+z) f'(-l) - \right. \\ &\quad \left. - \Pi(M, M_0; l-z) f'(l) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта формула показывает, что для настроенного диполя тангенциальная компонента электрического поля имеет особенность только на концах проводника (при $z = \pm l$), так что произведение $E_z(M, M_0; z) f(z)$ не имеет особенностей для $M \rightarrow M_0$. Из (10) видно также, что $E_z(M, M_0; z)$ внутри промежутка $(-l, l)$ остается конечной при стремлении M к M_0 .

Из формулы (10) в то же время следует, что мнимая часть поля E_z на проводнике обращается в бесконечность во всех тех точках, в которых функция распределения $f(z)$ не удовлетворяет уравнению (9), т. е. для любого ненастроенного диполя. В самом деле, функция источника

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos kr}{r} + i \frac{1}{4\pi} \frac{\sin kr}{r}.$$

Поэтому действительная часть интеграла $\int_{-l}^l \Pi F(\zeta) d\zeta$, равная

$$A = \int_{-l}^l \frac{\cos k \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}}{\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}} F(\zeta) d\zeta,$$

при стремлении $\rho \rightarrow 0$ обращается в бесконечность во всех тех точках, в которых $F(\zeta) \neq 0$. Нетрудно показать, что интеграл A при стремлении точки (M, z) к точке (M_0, z_0) , лежащей на токе $(-l < z_0 < l)$ всюду, где $F(\zeta) \neq 0$, имеет асимптотический порядок роста

$$A = 2 \ln \frac{1}{\rho} F(z_0) + \dots$$

Обратимся теперь к вычислению сопротивления излучения

$$R = -\frac{1}{I_0} \int_{-l}^l E_z(M_0, M_0; z) f(z) dz.$$

Как показывает формула (I), для настроенного диполя E_z непрерывна во всех внутренних точках линии тока, а в концевых точках имеет особенность порядка $\frac{1}{r}$, так что произведение $E_z f$ нигде не обращается в бесконечность. Отсюда следует, что сопротивление излучения настроенного диполя конечно.

С другой стороны, если $F(z) \neq 0$ хотя бы в одной внутренней точке линии тока, то она отлична от нуля и на некотором участке $(z - \delta, z + \delta)$. Во всех точках участка $(z - \delta, z + \delta)$ $I_m E_z$ обращается в бесконечность, а следовательно, равна бесконечности и мнимая часть сопротивления излучения этого участка.

Таким образом, доказаны теоремы.

Теорема 1. Только для настроенного диполя мнимая часть тангенциальной составляющей электрического поля во всех внутренних точках на проводнике остается конечной.

Теорема 2. Только для настроенного диполя реактивная часть сопротивления излучения любого его участка остается конечной.

При этом сопротивление излучения настроенного диполя дается формулой

$$R = -\frac{4\pi}{ck} i \left\{ f'(-l) \int_{-l}^l \Pi(M_0, M_0; l+z) f(z) dz - \right. \\ \left. - f'(l) \int_{-l}^l \Pi(M_0, M_0; l-z) f(z) dz \right\}. \quad (9)$$

Так как особенности электромагнитного поля на токе связаны с условием возбуждения, то характер этих особенностей должен оставаться одним и тем же, независимо от вида рассматриваемой области G . Отсюда следует, что полученные выше результаты остаются в силе для любого объема G как ограниченного, так и неограниченного.

§ 2

В дальнейшем мы будем рассматривать задачи о полуволновом диполе, помещенном внутри волновода.

Предварительно рассмотрим $\frac{\lambda}{2}$ -диполь в неограниченном пространстве.

В этом случае, учитывая соотношения

$$f(z) = \cos kz, \quad f'(-l) = -f'(l) = k, \quad f(\pm l) = 0,$$

нетрудно получить из (9)

$$R = -\frac{8\pi}{c} i \int_{-l}^l \Pi(M_0, M_0; l+z) \cos kz \, dz. \quad (II)$$

Подставляя сюда функцию источника для неограниченного пространства

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r},$$

будем иметь

$$R = \frac{1}{c} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos u}{u} \, du - i \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{u} \, du \right\}$$

или

$$R = 30 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos u}{u} \, du - i \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{u} \, du \right\},$$

т. е. мы получаем известную формулу для полуволнового диполя в неограниченном пространстве.

Перейдем теперь к вычислению сопротивления излучения полуволнового диполя в радиоволноводе произвольной формы.

Пусть в направлении оси z простирается бесконечный цилиндрический волновод G с идеально проводящими стенками Σ . Внутри G расположен полуволновой диполь, параллельный оси z . Обозначим: S — перпендикулярное сечение волновода; C — контур, ограничивающий область S и M_0 — точку S , соответствующую диполю.

Как было показано нами [4, 2], расчет полей в рассматриваемом случае производится по формулам (3) и (4). При этом функция Π представляет собой первую функцию источника, исследованную в предшествующих работах [4, 2], где было показано, что функция источника представляется следующим образом

$$\Pi(M, M_0; z - \zeta) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \pi(M, M_0; z - \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \psi_n(M_0)}{2\rho_n} e^{-\rho_n |z - \zeta|}. \quad (10)$$

Здесь $\pi(M, M_0; z - \zeta)$ — регулярное всюду решение волнового уравнения $\Delta \pi + k^2 \pi = 0$, $\rho_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$, $\psi_n(M)$ и λ_n — собственные функции и собственные значения мембраны S

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0 \text{ внутри } S, \psi_n = 0 \text{ на } C \quad (11)$$

(Δ_2 — двумерный оператор Лапласа).

Все, что было сказано в § 1 для неограниченного пространства, сохраняет свою силу и в этом случае, вплоть до обозначений.

Поэтому интересующее нас сопротивление излучения полуволнового диполя будем вычислять по формуле (II), установленной выше.

Подставляя в нее выражение для Π , взятое из (10), получим

$$R = -\frac{8\pi}{c} i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2(M_0)}{2\rho_n} \int_{-l}^l e^{-\rho_n(l+z)} \cos kz \, dz. \quad (12)$$

Возможность произведенного нами изменения порядка интегрирования и суммирования не вызывает сомнений.³

Вычисления дают

$$\int_{-l}^l e^{-p_n(l+s)} \cos kz \, dz = \frac{k}{\lambda_n} (1 + e^{-2p_n l}). \quad (13)$$

Если $\lambda_N < k^2$, а $\lambda_{N+1} > k^2$, то $p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2} = -ik_n$ при $n \leq N$ и $p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2} > 0$ при $n > N$. Разбивая в соответствии с этим бесконечную сумму на две суммы: от 1 до N (бегущие волны) и от $N+1$ до ∞ (затухающие волны), будем иметь

$$R = \frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\psi_n^2(M_0)}{x_n \lambda_n} (1 + e^{2ix_n l}) - i \frac{4\pi}{c} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k\psi_n^2(M_0)}{p_n \lambda_n} (1 + e^{-2p_n l}). \quad (14)$$

³ Возможность изменения порядка интегрирования и суммирования следует из теоремы Лебега [3].

Если последовательность функций $f_k(z)$ сходится почти всюду на $[a, b]$ к функции $f(z)$ и все функции $f_k(z)$ равномерно ограничены, то последовательность можно интегрировать почленно, т. е. $\int_a^b f_k(z) \, dz$ сходится к $\int_a^b f(z) \, dz$. При этом сходимость неопределенного интеграла

$$E_k(z) = \int_a^z f_k(t) \, dt, \quad a \leq z \leq b$$

к неопределенному интегралу

$$F(z) = \int_a^z f(t) \, dt$$

равномерно по z .

Однако в нашем случае нет необходимости прибегать к понятию меры множества, и доказательство возможности указанной перестановки может быть проведено элементарно. Заметим, что в нашем случае

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^k \frac{\psi_n^2(M_0)}{2p_n} e^{-p_n(l+s)} \cos kz$$

является монотонно возрастающей последовательностью положительных функций, равномерно сходящейся к предельной функции

$$f(z) = \Pi(M, M_0; l+z) \cos kz$$

внутри интервала $(-l+\delta, l-\delta)$ при любом $\delta > 0$. Кроме того, все эти функции равномерно ограничены числом B , так как $f(z)$ при $z = \pm l$ имеет конечное значение (равное $\frac{k}{4\pi}$).

Поэтому имеем

$$\left| \int_{-l}^l f(z) \, dz - \int_{-l}^l f_k(z) \, dz \right| \leq \varepsilon \cdot 2(l-\delta) + 4\delta B,$$

где $\varepsilon > 0$ — максимум $|f(z) - f_k(z)|$ на интервале $(-l+\delta, l-\delta)$. Из произвольности выбора δ , а также из того, что для достаточно большого k , ε может быть сделано сколь угодно малым, следует наше утверждение о возможности перестановки порядка суммирования и интегрирования.

Группируя действительные и мнимые слагаемые и вводя затем обозначение

$$\gamma_n^2 = \frac{\lambda_n}{k^2},$$

приходим к следующей основной формуле входного сопротивления полу-волнового диполя в волноводе

$$R = R^{(a)} - iR^{(r)}, \quad (15)$$

где

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2(M_0) (1 + \cos \pi \sqrt{1 - \gamma_n^2})}{\lambda_n \sqrt{1 - \gamma_n^2}} \quad (16)$$

$$R^{(r)} = -\frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2(M_0) \sin \pi \sqrt{1 - \gamma_n^2}}{\lambda_n \sqrt{1 - \gamma_n^2}} + \\ + \frac{4\pi}{c} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\psi_n^2(M_0) (1 + e^{-\pi \sqrt{\gamma_n^2 - 1}})}{\lambda_n \sqrt{\gamma_n^2 - 1}}. \quad (17)$$

Таким образом, величина реактанца $R^{(r)}$ выражается суммой (17). Очевидно, что ряд, стоящий справа, сходится, как то следует из конечности реактанца полуволнового диполя и возможности изменения порядка суммирования и интегрирования.

§ 3

Чтобы воспользоваться полученными в предыдущем параграфе формулами для волновода какой-нибудь определенной формы, следует вместо ψ_n поставить нормированные собственные функции соответствующей мембраны S , имеющей форму поперечного сечения волновода.

В частности, в случае волновода круглого сечения ортонормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\epsilon_0 a^2}} \frac{J_n\left(\frac{\mu_{mn}}{a} r\right)}{J_n'(\mu_{mn})} \cos n\varphi, \quad (18) \\ (\epsilon_n = 2 \text{ при } n \neq 0, \epsilon_0 = 1),$$

где μ_{mn} — m -й корень уравнения $J_n(\mu) = 0$, a — радиус волновода.

Пользуясь формулами (16) — (17), найдем для $\frac{\lambda}{2}$ -диполя, находящегося в точке $M_0(r_0, \varphi_0 = 0)$

$$R^{(a)} = \frac{4}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ (\gamma_{mn} < 1)}}^{\infty} \epsilon_n \left[\frac{J_n\left(\frac{\mu_{mn}}{a} r_0\right)}{J_n'(\mu_{mn})} \right]^2 \frac{1 + \cos \pi \sqrt{1 - \gamma_{mn}^2}}{\mu_{mn}^2 \sqrt{1 - \gamma_{mn}^2}} \quad (19)$$

$$R^{(r)} = -\frac{4}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ (\gamma_{mn} < 1)}}^{\infty} \epsilon_n \left[\frac{J_n\left(\frac{\mu_{mn}}{a} r_0\right)}{J_n'(\mu_{mn})} \right]^2 \frac{\sin \pi \sqrt{1 - \gamma_{mn}^2}}{\mu_{mn}^2 \sqrt{1 - \gamma_{mn}^2}} + \\ + \frac{4}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ (\gamma_{mn} > 1)}}^{\infty} \epsilon_n \left[\frac{J_n\left(\frac{\mu_{mn}}{a} r_0\right)}{J_n'(\mu_{mn})} \right]^2 \frac{1 + e^{-\pi \sqrt{\gamma_{mn}^2 - 1}}}{\sqrt{\gamma_{mn}^2 - 1}}. \quad (20)$$

Отсюда сразу же получаются формулы для диполя, находящегося на оси круглой трубы ($r_0 = 0$)

$$R^{(a)} = \frac{4}{c} \sum_{m=1}^N \frac{1 + \cos \pi \sqrt{1 - \gamma_m^2}}{J_1^2(\mu_m) \mu_m^2 \sqrt{1 - \gamma_m^2}}, \quad (21)$$

$$R^{(r)} = -\frac{4}{c} \sum_{m=1}^N \frac{\sin \pi \sqrt{1 - \gamma_m^2}}{J_1^2(\mu_m) \mu_m^2 \sqrt{1 - \gamma_m^2}} + \frac{4}{c} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1 + e^{-\pi \sqrt{\gamma_m^2 - 1}}}{J_1^2(\mu_m) \mu_m^2 \sqrt{\gamma_m^2 - 1}}. \quad (22)^4$$

Здесь μ_m — корень номера m уравнения $I_0(\mu) = 0$.

Результаты расчетов сопротивления излучения полуволнового диполя для случаев $r_0 = 0$, $r_0 = \frac{1}{4}a$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{3}{4}a$ приведены на рис. 1. На рис. 2 отдельно показано сопротивление излучения при $r_0 = 0$.

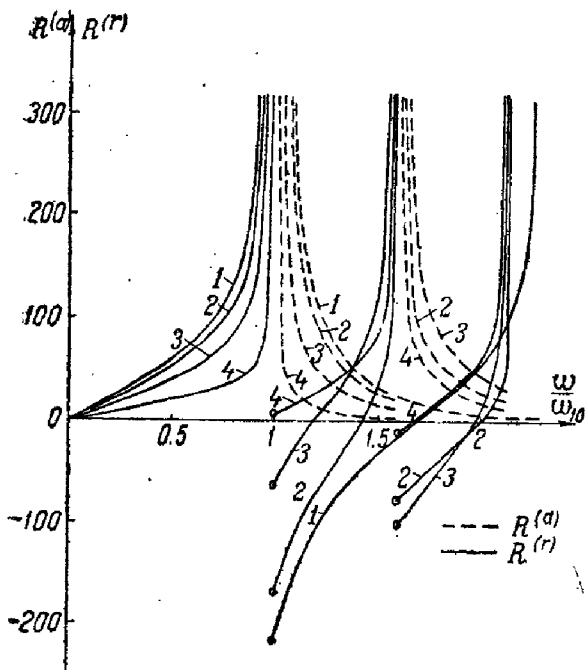


Рис. 1.

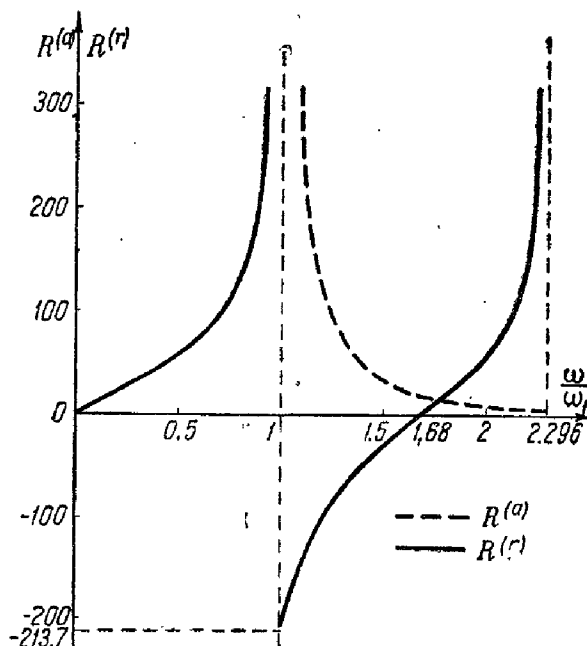


Рис. 2.

$$\gamma_n = \frac{\omega_n}{\omega}$$

1 — $r = 0$; 2 — $r = \frac{1}{4}$; 3 — $r = \frac{1}{2}$; 4 — $r = \frac{3}{4}$.

$$\gamma_m = \frac{\omega_m}{\omega}$$

Разрывы при $\frac{\omega}{\omega_{10}} = 1; 1.594; 2.136; 2.296$.

Отметим, что при переходе через критические значения частот ($p_n = 0$) реактанц испытывает полубесконечный разрыв, принимая конечное предельное значение справа, равное 213.7 ом при $\frac{\omega_1}{\omega} = 1$.

§ 4

Рассмотрим внутри волновода G линейный проводник L длины $2l$, вдоль которого задано распределение тока $I = I_0 f(s)$ [$f(s) \leq 1, -l \leq s \leq l$]. Направление этого проводника будем характеризовать единичным вектором $\vec{s}^0(\alpha, \beta, \gamma)$.

⁴ Подобная задача рассматривалась Левиным [1]; однако при вычислении реактанца им была допущена несущественная ошибка в знаке, вследствие чего, однако, физическая интерпретация и графическая иллюстрация полученного результата оказались качественно неверными. Исправленные графики даны в [3].

Задача о возбуждении волновода любыми токами решена в работах [5, 2]. При этом установлено, что электромагнитное поле в волноводе всегда можно представить следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{-ik} \left(\text{grad div } \vec{Z}_1 + k^2 \vec{Z}_1 \right) + \vec{E}_0 \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{Z}_1 + \vec{H}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь \vec{E}_0 и \vec{H}_0 — векторы всюду регулярного электромагнитного поля, вектор \vec{Z}_1 направлен вдоль тока, т. е. $\vec{Z}_1 = Z_1 \vec{s}_0$, причем функция Z_1 представима в виде интеграла

$$Z_1(M, M_0; z) = \frac{4\pi}{c} I_0 \int_{-l}^l \Pi_1(M, M_0(s_0); z - \zeta(s_0)) f(s_0) ds_0,$$

где Π_1 — любая функция источника, имеющая при $M = M_0$ и $z = \zeta$ особенность типа $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$.

Перейдем теперь к вычислению сопротивления излучения тока по формуле

$$R = -\frac{1}{I_0} \int_{-l}^l E_s[M_0(s_0), M_0(s_0); z(s_0)] f(s_0) ds_0.$$

Тангенциальную компоненту электрического поля E_s находим из (3)

$$E_s(M, M_0; z) = \frac{1}{-ik} \left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial s^2} + k^2 Z_1 \right) + E_{0s}.$$

Пользуясь выражением для Z_1 , можно написать

$$E_s(M, M_0; z) = \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} \int_{-l}^l \left(\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial s^2} + k^2 \Pi_1 \right) f(s_0) ds_0 + E_{0s}.$$

Из симметрии функции $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$ относительно аргументов (M, z) и (M_0, ζ) следует, что

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial s_0^2} + \chi(M, M_0; z, \zeta);$$

при этом функция χ регулярна всюду.

Поэтому

$$E_s = \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} \int_{-l}^l \left(\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial s_0^2} + k^2 \Pi_1 \right) f(s_0) ds_0 + \hat{E}_{0s},$$

где \hat{E}_{0s} — ограниченная функция.

Интегрируя по частям последнее равенство, используя при этом требование $f(\pm l) = 0$, получим в результате

$$E_s = \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} \left\{ -[\Pi_1 f'(s_0)]_{-l}^l + \int_{-l}^l \Pi_1(s_0) [f''(s_0) + k^2 f(s_0)] ds_0 \right\} + \hat{E}_{0s}.$$

Отсюда видно, что для настроенного диполя тангенциальная компонента электрического поля E_s имеет особенность только на концах проводника

$$E_s = \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} \{ (\Pi_1)_{s_0=-l} f'(-l) - (\Pi_1)_{s_0=l} f'(l) \} + \hat{E}_{0s}.$$

Следовательно, сопротивление излучения настроенного диполя, произвольным образом ориентированного внутри волновода, является конечной величиной. Этот результат, следующий из рассуждений § 1, мы здесь получили путем непосредственного изучения поля в волноводе. Впрочем, проведенные рассуждения сохраняют силу для произвольного объема.

Рассмотрим в качестве примера прямоугольный волновод. Направим координатные оси x и y вдоль сторон a и b перпендикулярного сечения, в одну из вершин которого поместим начало координат.

Нетрудно видеть из формул (3), что поля \vec{E}_0 и \vec{H}_0 обращаются в нуль, если вместо Π_1 взять функцию источника $\tilde{\Pi}$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= 0 & \text{при} & \quad x = 0, a, \\ \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial y} &= 0 & \text{при} & \quad y = 0, b. \end{aligned}$$

На функцию $\tilde{\Pi}$ переносятся без изменений все рассуждения и результаты, полученные в работе [4] для первой и второй функций источника Π и $\hat{\Pi}$. Следовательно, $\tilde{\Pi}$ имеет особенность $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$ в источнике и выражается формулой

$$\tilde{\Pi}(M, M_0; z - \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Psi}_n(M) \tilde{\Psi}_n(M_0)}{2\tilde{p}_n} e^{-\tilde{p}_n |z - \zeta|}, \quad (23)$$

причем $\tilde{p}_n = \sqrt{\tilde{\lambda}_n - k^2}$, а $\tilde{\Psi}_n(M)$ и $\tilde{\lambda}_n$ — собственные функции и собственные значения прямоугольной мембраны

$$\Delta_2 \tilde{\Psi}_n + \tilde{\lambda}_n \tilde{\Psi}_n = 0 \text{ в } S; \quad \tilde{\Psi}_n = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}_n}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b.$$

Очевидно, что в данном случае нормированные собственные функции $\tilde{\Psi}_n(M)$ имеют вид

$$\tilde{\Psi}_n(M) = \tilde{\Psi}_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{2e_n}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y \left(\begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right). \quad (24)$$

Ряд (23), определяющий функцию $\tilde{\Pi}_1$, является хорошо сходящимся для $z - \zeta \neq 0$; при $z = \zeta$ функция $\tilde{\Pi}$ может быть определена как предел

$$\tilde{\Pi}(M, M_0; 0) = \lim_{z - \zeta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Psi}_n(M) \tilde{\Psi}_n(M_0)}{2\tilde{p}_n} e^{-\tilde{p}_n |z - \zeta|}. \quad (25)$$

Поместим внутри волновода полуволновой диполь, направив его параллельно оси y .

Формула для тангенциальной компоненты электрического поля в нашем случае примет вид

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{-ik} [-\tilde{\Pi} f'(y_0)]_{M_1}^{M_2} = \\ &= -\frac{4\pi}{c} I_0 i \{ \tilde{\Pi}(x, y; d, y_2; 0) + \tilde{\Pi}(x, y; d, y_1; 0) \}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $M_1(d, y_1, 0)$ и $M_2(d, y_1 + \frac{\lambda}{2}, 0)$ — концы диполя.

Распределение тока вдоль полуволнового диполя будет задаваться функцией

$$f(y) = \sin k(y - y_1).$$

Для сопротивления излучения получим

$$R = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ -\frac{4\pi}{c} i \left[\int_{y_1}^{y_2} \tilde{\Pi}(d, \eta; d, y_2; \delta) f(\eta) d\eta + \int_{y_1}^{y_2} \tilde{\Pi}(d, \eta; d, y_1; \delta) f(\eta) d\eta \right] \right\}, \quad (27)$$

т. е. мы интегрируем не по линии тока, а по отрезку, параллельному ей и лежащему в плоскости $z - \zeta = \delta > 0$, а затем переходим к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Это связано с определением функции источника $\tilde{\Pi}$ при $\delta = 0$ согласно (25).

Подставляя в (27) выражение (23) для $\tilde{\Pi}$, получаем

$$R = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ -\frac{4\pi}{c} i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{ab} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{a} d \cos \frac{\pi n}{b} \left(y_1 + \frac{\pi}{2k} \right) \cos \frac{\pi^2 n}{2bk} A_n}{\tilde{p}_{mn}} e^{-\tilde{p}_{mn} \delta} \right\}, \quad (28)$$

причем

$$\tilde{\lambda}_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

$$\tilde{p}_{mn} = \sqrt{\tilde{\lambda}_{mn} - k^2} = \sqrt{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - k^2}.$$

Вычисления дают

$$A_n = -\frac{2k}{\left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 - k^2} \cos \frac{\pi n}{b} \left(y_1 + \frac{\pi}{2k} \right) \cos \frac{\pi^2 n}{2bk}. \quad (29)$$

Разделяя в (28) мнимую и вещественную части, приходим к следующим формулам

$$R^{(a)} = \frac{8\pi}{c} k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ (\tilde{\lambda}_{mn} < k^2)}}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{ab} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{a} d \cos^2 \frac{\pi n}{b} \left(y_1 + \frac{\pi}{2k} \right) \cos^2 \frac{\pi^2 n}{2bk}}{\tilde{p}_{mn} \left[k^2 - \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]} \quad (30)$$

$$R^{(b)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ -\frac{8\pi}{c} k \sum_n \sum_m \frac{2\varepsilon_n}{ab} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{a} d \cos^2 \frac{\pi n}{b} \left(y_1 + \frac{\pi}{2k} \right) \cos^2 \frac{\pi^2 n}{2bk}}{\tilde{p}_{mn} \left[\left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 - k^2 \right]} e^{-\tilde{p}_{mn} \delta} \right\}^5 \quad (31)$$

⁵ Все экспоненциальные множители при $z = 0$ равны единице. Однако перестановка суммирования и интегрирования в этой формуле не представляется возможной, что очевидно, если положить $d = \frac{a}{2}$. В этом случае первая сумма, равная

$$\sum' \frac{1}{\sqrt{\pi^2 (m^2/a^2) + n^2/b^2} - k^2},$$

где штрих (') указывает на то, что суммирование производится по нечетным значениям индекса m , является расходящейся.

На рис. 3 дается функция

$$F(\delta) = -\frac{8\pi}{c} k \sum_n^{\infty} \sum_m^{\infty} \frac{2\epsilon_n}{ab} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{a} d \cos^2 \frac{\pi n}{b} \left(y_1 + \frac{\pi}{2k} \right) \cos^2 \frac{\pi^2 n}{2bk}}{\tilde{p}_{mn} \left[\left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 - k^2 \right]} e^{-\tilde{p}_{mn} z} \quad (32)$$

(для того случая, когда в волноводе распространяется только волна H_0), показывающая характер стремления к пределу выражения, стоящего под знаком \lim в формуле (31).⁶

Ранее мы убедились, что реактанц полуволнового диполя, параллельного оси, дается в виде хорошо сходящегося ряда. Только что рассмотренный нами пример, хотя и показывает возможность расчета на основе общего метода реактанца диполя, перпендикулярного оси, однако, сходимость рядов, определяющих реактанц, является весьма медленной.

Пользуемся случаем, чтобы выразить благодарность Ю. С. Фролову за помощь при проведении расчетов.

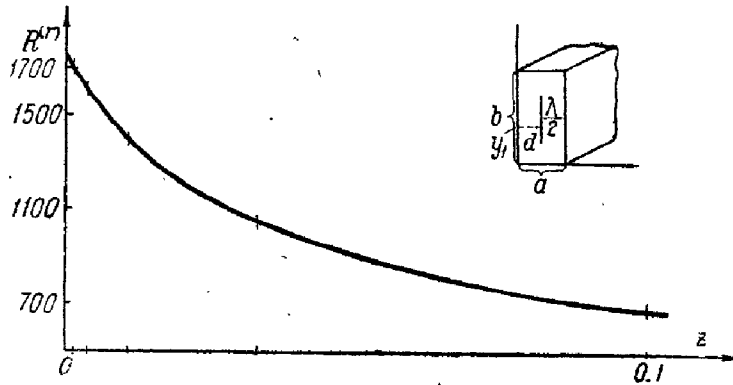


Рис. 3.

Литература

- [1] М. А. Левин. ДАН СССР, 51, 433, 1946. — [2] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов. ЖТФ, в. 7, 1948. — [3] П. С. Александров и А. Н. Колмогоров. Введение в теорию функций действительного переменного, ГТТИ, М.—Л., 1933. — [4] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов. ЖТФ, XVII, 1283, 1947. — [5] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов. ЖТФ, XVII, 1431, 1947. — [6] М. А. Левин. Изв. АН СССР, сер. физ., XI, 404, 1947.

Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Поступило в Редакцию
24 июля 1948 г.

⁶ Приведенный график имеет иллюстративное значение и не претендует на точность.