О ВОЗБУЖДЕНИИ РАДИОВОЛНОВОДОВ. III

А. А. Самарский и А. Н. Тихонов

В двух предшествующих статьях [1, 2] нами была рассмотрена задача о возбуждении цилиндрического волновода произвольного сечения при помощи произвольных токов, расположенных внутри волновода.

В настоящей статье мы имеем в виду получить формулы для активной части сопротивления излучения $R^{(a)}$ произвольного тока.

Задачи о вычислении сопротивления излучения $R^{(a)}$ рассматривались в работах Щелкунова [3], Слэтера [4], Левина [5]. Так, Щелкунов дал формулу для сопротивления излучения элемента тока, параллельного оси круглого волновода. Левин рассчитал сопротивление излучения полуволнового диполя, лежащего на оси круглого волновода. В книге Слэтера [4] приведен приближенный расчет величины $R^{(a)}$ в волноводе прямоугольного сечения для диполя, расположенного параллельно одной из сторон перпендикулярного сечения.

В § 1 настоящей работы дана постановка проблемы возбуждения радиоволноводов токами. Понятие сопротивления излучения тока, а также методы его вычисления излагаются в § 2. После этого в § 3 проводится вычисление с помощью комплексной теоремы Пойнтинга сопротивления излучения токов, расположенных в плоскости, перпендикулярной оси волновода; при этом устанавливается метод такого рода вычислений.

В § 4 проводится вычисление сопротивления излучения $R^{(a)}$ произвольно расположенных токов. Все результаты §§ 3—4 могут быть получены методом наведенных эдс, что и сделано в § 5.

В § 6 дается применение полученных результатов к тем случаям, которые были рассмотрены ранее Щелкуновым и Слэтером. Показано, что формулы Щелкунова и Слэтера вытекают из общих формул § 4. Вопрос об излучении полуволнового диполя, в частности, вопрос о конечности реактанца будет рассмотрен в следующей работе.

1. Пусть вдоль оси z простирается бесконечная цилиндрическая область Σ с идеально проводящими стенками, внутри которой расположен линейный ток L силы $I' = I(s)\,e^{-i\omega t}$ (s — длина дуги вдоль L). Обозначим через S область, получающуюся в перпендикулярном сечении цилиндра Σ, а через C — контур, ограничивающий S.

Электромагнитное поле, возбуждаемое внутри волновода Σ током, текущим вдоль L, определяется из: 1) уравнений Максвелла; 2) граничного условия: $E_{\text{tang}} = 0$ на поверхности Σ; 3) условий излучения на бесконечности, которые мы будем здесь понимать в том смысле, что решение не содержит приходящих из бесконечности волн; 4) условия возбуждения на токе L

$$\oint_{K_\varepsilon} H_s\,ds = \frac{4\pi}{c} I,^1 \tag{1}$$

[1] Мы пользуемся гауссовой системой единиц.

где интегрирование производится по бесконечно малому контуру K_ε, охватывающему ток L. Условие (1) мы будем понимать в том смысле, что магнитное поле имеет на линейном проводнике особенность

$$H_s \approx \frac{2I}{c\rho}, \tag{1'}$$

где ρ — расстояние от точки M_0 на токе L до точки M на контуре K_ε; в этом случае условие (1) автоматически выполняется.[2]

Всякое электромагнитное поле в волноводе можно представить в виде суммы волн TE и TM (см. предыдущую статью в настоящем выпуске); откуда следует, что[3]

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{-ik}\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}_e + k^2\vec{Z}_e\right) + \operatorname{rot}\vec{Z}_m \\ \vec{H} &= \operatorname{rot}\vec{Z}_e + \frac{1}{ik}\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}_m + k^2\vec{Z}_m\right) \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — векторы электрического и магнитного полей; $\vec{Z}_e$ и $\vec{Z}_m$ — электрический и магнитный векторы Герца, у которых лишь аксиальная компонента отлична от нуля.

$$\vec{Z}_e = Z_e\vec{i}_3, \quad \vec{Z}_m = Z_m\vec{i}_3 \tag{3}$$

($\vec{i}_3$ — единичный направляющий вектор оси z).

В случае линейного тока справедливы формулы

$$\left.\begin{aligned} Z_e(M, z) &= K\int\limits_L \Pi_e(M, z; M_0(s), \zeta(s))\, I(s)\, ds \\ Z_m(M, z) &= K\int\limits_L \Pi_m(M, z; M_0(s), \zeta(s))\, I(s)\, ds \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где $\Pi_e(M, z; M_0, \zeta)$ и $\Pi_m(M, z, M_0, \zeta)$ — функции источника, соответствующие задаче возбуждения элементарным током [2], K — нормирующий множитель, который мы определим из условий возбуждения.

На основании формул, полученных в предыдущей работе [2] для элемента тока, имеющего произвольное направление $\vec{l^0}(\alpha, \beta, \gamma)$ $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$, функции Π_e и Π_m могут быть представлены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_e(M, z; M_0, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\,\Psi_n(M_0)}{2\lambda_n p_n}\, e^{-p_n|z-\zeta|} \\ \Pi_m(M, z; M_0, \zeta) &= ik\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\Psi}_n(M_0)}{2\hat{\lambda}_n \hat{p}_n}\, e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|} \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где

$$p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}, \quad \hat{p}_n = \sqrt{\hat{\lambda}_n - k^2}. \tag{6}$$

[2] Обычно условия возбуждения определяются при изучении поля вдали от источников возбуждения; это можно сделать, базируясь на некоторых вспомогательных рассуждениях (см., например [3, 4, 6]). Определение поля при помощи задания его особенностей на источниках представляется нам значительно более естественным (см., например [7]).

[3] При этом мы несколько видоизменяем форму записи выражений $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через $\vec{Z}_e$ и $\vec{Z}_m$ по сравнению с предыдущей работой [2].

При этом $\psi_n(M)$ и $\hat{\psi}_n(M)$ обозначают собственные функции мембраны S

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0 \quad \text{внутри } S, \quad \psi_n = 0 \quad \text{на } C, \tag{7}$$

$$\Delta_2 \hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n \hat{\psi}_n = 0 \quad \text{внутри } S, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } C. \tag{8}$$

Здесь Δ_2 обозначает двухмерный оператор Лапласа; ν — нормаль к контуру C.

Вводя, как это мы делали раньше, координатные оси x и y в плоскости перпендикулярного сечения S, получим следующие выражения для $\Psi_n(M_0)$ и $\hat{\Psi}_n(M_0)$:

$$\Psi_n(M_0) = \pm p_n \left[\alpha \frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial y_0} \right] + \gamma \lambda_n \psi_n(M_0), \quad \left(\begin{matrix} + \text{ при } z > \zeta \\ - \text{ при } z < \zeta \end{matrix} \right) \tag{9}$$

$$\hat{\Psi}_n(M_0) = \alpha \frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial y_0} - \beta \frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0}. \tag{10}$$

Если ток направлен вдоль оси z, то $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $\Psi_n(M_0) = \lambda_n \psi_n(M_0)$, $\hat{\Psi}_n(M_0) = 0$, и мы получаем

$$\Pi_e = \Pi(M, z; M_0, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M_0)}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|}, \tag{11}$$

$$\Pi_m = 0,$$

т. е. электромагнитное поле выражается полностью через первую функцию источника, исследованную нами в работе [1]. Функция Π в источнике имеет особенность типа $\frac{e^{ikr}}{r}$ и представима в виде суммы

$$\Pi(M, z; M_0, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} + \pi(M, z; M_0, \zeta),^4 \tag{12}$$

где $\pi(M, z; M_0, \zeta)$ — регулярная всюду функция, удовлетворяющая волновому уравнению $\Delta\pi + k^2\pi = 0$, принципу излучения и граничному условию

$$\pi = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{на } \Sigma.$$

---

[4] Характер особенности функции Π был установлен в работах [1, 2], однако в этих работах по недосмотру, не имеющему существенного влияния на характер полученных там результатов, был пропущен множитель $\frac{1}{4\pi}$, так что особенность функции источника Π считалась равной $\frac{e^{ikr}}{r}$, в то время как в действительности она равна $\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$, чем мы здесь и пользуемся.

Магнитное поле H_s имеет вблизи тока особенность типа $\frac{1}{\rho}$ и выражается формулой

$$H_s = -\frac{\partial Z}{\partial \rho}, \tag{13}$$

где $\rho = \overline{MM_0}$.

Из характера особенности функции источника следует, что вблизи тока

$$Z \approx \frac{IK}{4\pi} 2 \ln \frac{1}{\rho}. \tag{14}$$

Из (13), (14) и (1) следует, что

$$K = \frac{4\pi}{c}. \tag{15}$$

Значение этого нормирующего множителя относится к случаю произвольно ориентированного тока, как это следует из результатов работы [2].

Поэтому формулы, определяющие функции Герца Z_e и Z_m, записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} Z_e(M,z) &= \frac{4\pi}{c} \int \Pi\ (M, z; M_0(s), \zeta(s))\, I(s)\, ds \\ Z_m(M,z) &= \frac{4\pi}{c} \int\limits_L \Pi_m (M, z; M_0(s), \zeta(s))\, I(s)\, ds \end{aligned}\right\}. \tag{4'}$$

В частности, для элементарного тока длины l отсюда получаем

$$Z_e = \frac{4\pi}{c} Il\Pi_e, \quad Z_m = \frac{4\pi}{c} Il\Pi_m. \tag{16}$$

При расчете полей, возбуждаемых объемными и поверхностными токами, векторы Герца выражаются объемными и соответственно поверхностными интегралами.

Формулы (2), (4), (5), (7) и (8) позволяют полностью определить возбуждаемое током L электромагнитное поле в волноводе.

До сих пор мы всюду пользовались гауссовой системой единиц. Однако переход к любой другой системе единиц не представляет затруднений. В частности, в практической системе единиц Георги, весьма распространенной в радиотехнической литературе, основные соотношения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{-i\omega\varepsilon}\left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z}_e + k^2 \vec{Z}_e\right) + \operatorname{rot} \vec{Z}_m \\ \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{Z}_e + \frac{1}{i\omega\mu}\left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z}_m + k^2 \vec{Z}_m\right) \end{aligned} \quad (k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu) \right\}, \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_e(M, z) &= \int\limits_L \Pi_e(M, z; M_0(s), \zeta(s))\, I(s)\, ds \\ Z_m(M, z) &= \int\limits_L \Pi_m(M, z; M_0(s), \zeta(s))\, I(s)\, ds \end{aligned}\right\}, \tag{4'}$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi_e(M, z; M_0, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\Psi_n(M_0)}{2\lambda_n p_n} e^{-p_n|z-\zeta|} \\ \Pi_m(M, z; M_0, & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M)\hat{\Psi}_n(M_0)}{2\hat{\lambda}_n \hat{p}_n} e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|} \end{aligned}\right\} . \qquad (5')$$

В дальнейшем мы будем пользоваться гауссовой системой единиц, за исключением тех случаев, когда нам придется проводить сравнение наших результатов с результатами работ других авторов,, выраженными в практических единицах.

Перейдем теперь к вычислению сопротивления излучения токов в волноводе.

2. Пусть Ω — некоторая поверхность, охватывающая ток L, а V — объем, ограниченный этой поверхностью. Рассмотрим поток электромагнитной энергии, излучаемой током, через поверхность Ω.

Под мощностью излучения W_r тока мы будем понимать предел, к которому стремится поток комплексного вектора Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}^*\right]$ ($\vec{H}^*$ — комплексносопряженный вектор для $\vec{H}$) через поверхность Ω при стягивании ее к поверхности проводника.

Сопротивление излучения проводника с током $I = I_0 f(s)$ ($f(s) \leqslant 1$) естественно определить как отношение

$$R = \frac{W_r}{I_0^2} = R^{(a)} - iR^{(r)}, \qquad (17)$$

где $R^{(a)}$ — активная часть сопротивления излучения, $R^{(r)}$ — реактивная часть входного сопротивления.

Воспользуемся известной теоремой Пойнтинга, которая в нашем случае запишется в виде

$$\int\limits_L \mathbf{E}(s) I^*(s)\, ds = \iint\limits_\Omega \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}^*\right]\vec{d\sigma} - 2i\omega \iiint\limits_V \frac{\vec{H}\vec{H}^* - \vec{E}\vec{E}^*}{8\pi}\, dV, \qquad (18)$$

где $\mathbf{E}(s)$ — напряженность поля сторонних сил, приложенных к проводнику, $I(s)$ — полный ток, протекающий через сечение проводника.

Из этой формулы (а также из непосредственного рассмотрения особенностей полей) следует, что

$$\lim \iint\limits_{\Omega_1} \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}^*\right]\vec{d\sigma} = \int\limits_L \mathbf{E}(s) I^*(s)\, ds = W_r, \qquad (19-20)$$

причем предельный переход в левой части равенства соответствует стягиванию поверхности Ω_1 к линии тока L.

В случае неограниченного пространства, как известно, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в волновой зоне находятся в фазе, т. е. произведение $\left[\vec{E}\vec{H}^*\right]$

является действительной величиной; поэтому имеют место формулы [9]

$$R^{(a)} = \lim_{\Omega \to \infty} \frac{1}{I_0^2} \iint_{\Omega} \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E}\vec{H}^*\right] \vec{d\sigma}, \tag{21}$$

$$R^{(r)} = \lim_{V \to \infty} \frac{2\omega}{I_0^2} \iiint_{V} \frac{\vec{H}\vec{H}^* - \vec{E}\vec{E}^*}{8\pi} dV. \tag{22}$$

Из работ [1] и [2] следует, что для волновода произвольного сечения поток энергии через бесконечно удаленное сечение является также действительной величиной.

Принимая во внимание равенство нулю потока энергии через боковую поверхность волновода Σ, получим

$$R^{(a)} = \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{I_0^2} \iint_{S_z + S_{-z}} \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E}\vec{H}^*\right] \vec{d\sigma}, \tag{21'}$$

$$R^{(r)} = \frac{2\omega}{I_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \iint_{S_z} \frac{\vec{H}\vec{H}^* - \vec{E}\vec{E}^*}{8\pi} d\sigma, \tag{22'}$$

где S_z — перпендикулярное сечение волновода на расстоянии z от начала координат.

В том случае, когда задана сила тока $I(s)$ на проводнике, сторонние силы $\mathbf{E}(s)$ следует заменить наведенными полями E_s. Это приводит к другому методу определения сопротивления излучения (метод наведенных эдс)

$$R = R^{(a)} - iR^{(r)} = -\frac{1}{I_0^2} \int_L E_s(s) I^*(s) ds.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться обеими формами представления сопротивления излучения.

3. Для простоты рассмотрим сначала прямолинейный элемент тока L (длины l), расположенный в плоскости $z=0$ перпендикулярно к оси z. Направим ось y вдоль тока, а ось x перпендикулярно к нему.

Найдем активную часть сопротивления излучения элемента тока по формуле (21′)

$$R^{(a)} = \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{I_0^2} \iint_{S_z + S_{-z}} \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E}\vec{H}^*\right]_z d\sigma.$$

Подставляя в формулу (21′) найденные из (2) выражения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$, пользуясь далее соответствующими формулами для $\vec{E}^*$ и $\vec{H}^*$ и учитывая, что в данном случае

$$Z_e = \frac{4\pi}{c} Il \Pi_e, \quad Z_m = \frac{4\pi}{c} Il \Pi_m,$$

получим

$$R^{(a)} = \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{I_0^2} \iint\limits_{S_z + S_{-z}} \frac{c}{4\pi} (E_x H_y^* - E_y H_x^*)\, dx\, dy =$$

$$= \lim_{|z| \to \infty} \frac{4\pi}{c} \frac{l^2}{(-ik)^2} \iint\limits_{S_z+S_{-z}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x \partial z} - ik \frac{\partial \Pi_m}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial y \partial z} + ik \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial x} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial y \partial z} + ik \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial x \partial z} - ik \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial y} \right) \right\} dx\, dy =$$

$$= \lim_{|z| \to \infty} \frac{4\pi}{c} \frac{l^2}{(-ik)^2} \left\{ \iint\limits_{S_z+S_{-z}} ik \left(\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x \partial z} \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial y \partial z} \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial y} \right) dx\, dy - \right.$$

$$- \iint\limits_{S_z+S_{-z}} ik \left(\frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial x \partial z} \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial y \partial z} \frac{\partial \Pi_m}{\partial y} \right) dx\, dy -$$

$$- \iint\limits_{S_z+S_{-z}} (ik)^2 \left(\frac{\partial \Pi_e^*}{\partial x} \frac{\partial \Pi_m}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial y} \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} \right) dx\, dy +$$

$$\left. + \iint\limits_{S_z+S_{-z}} \left(\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial x \partial z} \right) dx\, dy \right\}. \tag{23}$$

Нетрудно убедиться в том, что последние два интеграла равны нулю.

В самом деле,

$$\iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial \Pi_e^*}{\partial x} \frac{\partial \Pi_m}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial y} \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{S_z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi_e^* \frac{\partial \Pi_m}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Pi_e^* \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} \right) \right] dx\, dy =$$

$$= \int\limits_C \left\{ \Pi_e^* \frac{\partial \Pi_m}{\partial y} \cos(\widehat{\nu x}) - \Pi_e^* \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} \cos(\widehat{\nu y}) \right\} ds = \int\limits_C \Pi_e^* \frac{\partial \Pi_m}{\partial s}\, ds = 0,$$

так как $\Pi_e^* = 0$ на C.

Подобно этому можно показать, что

$$\iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial x \partial z} \right) dx\, dy = 0.$$

Таким образом,

$$R^{(a)} = \lim_{z \to \infty} \frac{4\pi}{c} \frac{2l^2}{ik} \left\{ \iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x \partial z} \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial y \partial z} \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial y} \right) dx\, dy - \right.$$

$$\left. - \iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial x \partial z} \frac{\partial \Pi_m^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial y \partial z} \frac{\partial \Pi_m^*}{\partial y} \right) dx\, dy \right\}. \tag{24}$$

При этом мы учли, что интеграл, распространенный на сумму областей $S_z + S_z$, равен удвоенному интегралу по области S_z.

Пользуясь формулами, определяющими функции Π_e и Π_m, а также свойством ортогональности собственных функций мембраны, находим

$$\iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x \partial z} \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial y \partial z} \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial y}\right) dx\, dy = -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M_0)\Psi_n^*(M_0)}{4p_n\lambda_n} \iint\limits_{S_z} (\nabla\psi_n)^2\, dxdy \cdot e^{-(p_n+p_n^*)z}, \; (z>0). \qquad (24a)$$

Первая формула Грина дает

$$\iint\limits_{S_z} (\nabla\psi_n)^2\, dx\, dy = -\iint\limits_{S_z} \psi_n \Delta_2 \psi_n\, dx\, dy + \int \psi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} ds =$$

$$= \lambda_n \iint\limits_{S_z} \psi_n^2\, dx\, dy = \lambda_n,$$

так как $\Delta_2 \psi_n = -\lambda_n \psi_n$, а собственные функции нормированы к единице

$$\iint\limits_{S_z} \psi_n^2\, dx\, dy = 1.$$

Для диполя, ориентированного вдоль оси y, $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ и

$$\Psi_n(M_0) = -p_n \frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial y_0}, \quad \hat{\Psi}_n(M_0) = -\frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0},$$

где $M_0(x_0, y_0)$ обозначает точку, в которой находится диполь (точнее его центр).

Среди значений $p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$ конечное число — комплексно (назовем их $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N$, причем $p_j = -i\varkappa_j$, где $\varkappa_j$ действительно, $\varkappa_j > 0$), а остальные значения, для которых $\lambda_n > k^2$, действительны. Поэтому после перехода к пределу при $z \to \infty$ бесконечная сумма (24a) сведется к конечной сумме N слагаемых, соответствующих мнимым значениям чисел p_n. В результате мы получим

$$\lim_{z\to\infty} \iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x\, \partial z} \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_e^*}{\partial x\, \partial z} \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial y}\right) dx\, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\Psi_n(M_0)\Psi_n^*(M_0)}{4i\varkappa_n\lambda_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varkappa_n \left(\frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial y_0}\right)^2}{4i\lambda_n}.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к формуле

$$\lim_{z\to\infty} \iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial x \partial z} \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_m^*}{\partial y \partial z} \frac{\partial \Pi_m}{\partial y}\right) dx\, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\Psi_n(M_0)\Psi_n^*(M_0)}{-4i\hat{\varkappa}_n\hat{\lambda}_n} = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{k^2 \left(\frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0}\right)^2}{-4i\hat{\varkappa}_n\hat{\lambda}_n},$$

где N_1 — число мнимых значений $\hat{p}_n = \sqrt{\hat{\lambda}_n - k^2}$.

Подставляя найденные для интегралов значения в (24), будем иметь

$$R^{(a)}=\frac{4\pi}{c}\frac{l^2}{k}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{\Psi_n(M_0)\Psi_n^*(M_0)}{2\varkappa_n\lambda_n}+\sum_{n=1}^{N_1}\frac{k^2\hat{\Psi}_n(M_0)\hat{\Psi}_n^*(M_0)}{2\hat{\varkappa}_n\hat{\lambda}_n}\right\} \tag{25}$$

или

$$R^{(a)}=\frac{4\pi}{c}\frac{l^2}{k}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{\varkappa_n}{2\lambda_n}\left(\frac{\partial\psi_n(M_0)}{\partial y_0}\right)^2+\sum_{n=1}^{N_1}\frac{k^2}{2\hat{\varkappa}_n\hat{\lambda}_n}\left(\frac{\partial\hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0}\right)^2\right\}. \tag{26}$$

Если проводник L с током $I=I_0 f(s)$ имеет конечную длину, сравнимую с длиной волны, то формула (25) остается в силе; однако вместо $\Psi_n(M_0)$ и $\hat{\Psi}_n(M_0)$ следует подставить интегралы

$$\left.\begin{aligned}\Psi_n(M_0)&=-p_n\int_L\frac{\partial\psi_n(x_0,y_0)}{\partial y_0}f(y_0)\,dy_0\\ \hat{\Psi}_n(M_0)&=-\int_L\frac{\partial\hat{\psi}_n(x_0,y_0)}{\partial x_0}f(y_0)\,dy_0\end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

4. Пусть проводник L с током $I=I_0 f(s)$ имеет произвольную ориентацию и характеризуется единичным направляющим вектором $\vec{l^0}$ $(\alpha,\ \beta,\gamma)$, причем $\alpha=\alpha(s)$, $\beta=\beta(s)$, $\gamma=\gamma(s)$, т. е. L имеет произвольную форму; для прямолинейного проводника $\alpha=\alpha_0=\text{const}$, $\beta=\beta_0=\text{const}$, $\gamma=\gamma_0=\text{const}$.

Нетрудно убедиться в том, что вычисление сопротивления излучения проводится вполне аналогично § 3

$$\begin{aligned}R^{(a)}=\lim_{z\to\infty}\frac{c}{4\pi}\frac{2}{ikI_0^2}\iint_{S_z}\Big\{\Big(&\frac{\partial^2 Z_e}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial Z_e^*}{\partial x}+\frac{\partial^2 Z_e}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial Z_e^*}{\partial y}\Big)-\\ &-\Big(\frac{\partial^2 Z_m^*}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial Z_m}{\partial x}+\frac{\partial^2 Z_m^*}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial Z_m}{\partial y}\Big)\Big\}\,dxdy,\end{aligned} \tag{24'}$$

где функции Z_e и Z_m определяются формулами

$$Z_e(M,z)=\frac{4\pi}{c}I_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M)\Phi_n(z)}{2\lambda_n p_n}, \tag{28}$$

$$Z_m(M,z)=\frac{4\pi}{c}I_0\,ik\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\psi}_n(M)\hat{\Phi}_n(z)}{2\hat{\lambda}_n\hat{p}_n}, \tag{29}$$

если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\Phi_n(z)=\int_L\Big\{-p_n\Big[\alpha(s)\frac{\partial\psi_n(x_0(s),y_0(s))}{\partial x_0}+\beta(s)\frac{\partial\psi_n(x_0(s),y_0(s))}{\partial y_0}\Big]+\\ +\gamma(s)\lambda_n\psi_n(x_0(s),y_0(s))\Big\}f(s)\,e^{-p_n|z-\zeta(s)|}\,ds,\end{aligned} \tag{30}$$

$$\hat{\Phi}_n(z)=\int_L\Big\{\alpha(s)\frac{\partial\hat{\psi}_n(x_0(s),y_0(s))}{\partial y_0}-\beta(s)\frac{\partial\hat{\psi}_n(x_0(s),y_0(s))}{\partial x_0}\Big\}f(s)\,e^{-\hat{p}_n|z-\zeta(s)|}\,ds. \tag{31}$$

Подставляя выражения для Z_e и Z_m в формулу (24′), получим после ряда преобразований, аналогичных преобразованиям, проведенным в § 3, следующую основную формулу

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c}\left\{\sum_{n=1}^{N} \frac{\Phi_n(0)\,\Phi_n^*(0)}{2k\varkappa_n\lambda_n} + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{k\widehat{\Phi}_n(0)\,\widehat{\Phi}_n^*(0)}{2\widehat{\varkappa}_n\widehat{\lambda}_n}\right\}. \tag{32}$$

Отсюда для элемента тока длины l имеем

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c}\,\frac{l^2}{k}\left\{\sum_{n=1}^{N} \frac{\Psi_n(M_0)\,\Psi_n^*(M_0)}{2\varkappa_n\lambda_n} + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{k^2\,\widehat{\Psi}_n(M_0)\,\widehat{\Psi}_n^*(M_0)}{2\widehat{\varkappa}_n\widehat{\lambda}_n}\right\}, \tag{33}$$

где $\Psi_n(M_0)$ и $\widehat{\Psi}_n(M_0)$ определяются формулами (9) и (10).

Из формулы (32), в частности, легко найти $R^{(a)}$ для прямолинейного тока, параллельного оси волновода $(\alpha=\beta=0, \gamma=1)$

$$\begin{aligned} R^{(a)} &= \frac{4\pi}{ck}\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n\psi_n^2(M_0)}{2\varkappa_n} f_n\cdot f_n^* = \\ &= \frac{4\pi}{ck}\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n\psi_n^2(M_0)}{2\varkappa_n}\left\{\left[\int_L f(\zeta)\cos\varkappa_n\zeta\,d\zeta\right]^2 + \left[\int_L f(\zeta)\sin\varkappa_n\zeta\,d\zeta\right]^2\right\} \end{aligned} \tag{34}$$

$$f_n = \int_L e^{i\varkappa_n\zeta} f(\zeta)\,d\zeta = \int_L \cos\varkappa_n\zeta f(\zeta)\,d\zeta + i\int_L f(\zeta)\sin\varkappa_n\zeta\,d\zeta$$

В частности, для элементарного тока, параллельного оси z, имеем

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c}\,\frac{l^2}{k}\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n\psi_n^2(M_0)}{2\varkappa_n}. \tag{34′}$$

Вычисление реактивной части $R^{(r)}$ для тока L может быть проведено по формуле (22), причем реактанц дается объемным интегралом, распространенным по всей неограниченной области G. Отметим при этом, что вопрос о конечности реактанца связан со сходимостью его определяющего объемного интеграла, что, как уже указывалось выше, будет выяснено в следующей работе.

Формулы, определяющие активную часть $R^{(a)}$ сопротивления излучения и показывающие конечность ее во всех случаях, характеризуют устойчивость этой физической величины. Отсюда следует, что активную часть можно вычислять независимо от того, конечен или бесконечен реактанц.

5. Проведем вычисление сопротивления излучения произвольно расположенного тока, пользуясь методом наведенных эдс, изложенным в § 2.

Будем исходить из формулы

$$R^{(a)} = -\frac{1}{I_0^2}\int_L \mathrm{real}\,[E_s(s)\,I^*(s)]\,ds, \tag{35}$$

где значения тангенциальной компоненты электрического поля берутся на проводнике.

Определим тангенциальную составляющую электрического поля на токе L, направление которого дается единичным вектором $\vec{l^0}(s)\,[\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)]$

$$\begin{aligned} E_s &= E_x\alpha(s) + E_y\beta(s) + E_z\gamma(s) = \left(\frac{1}{-ik}\frac{\partial^2 Z_e}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial Z_m}{\partial y}\right)\alpha(s) + \\ &+ \left(\frac{1}{-ik}\frac{\partial^2 Z_e}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial Z_m}{\partial x}\right)\beta(s) + \frac{1}{-ik}\left(\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e\right)\gamma(s) = \\ &= \frac{1}{-ik}\left[\frac{\partial^2 Z_e}{\partial x\,\partial z}\alpha(s) + \frac{\partial^2 Z_e}{\partial y\,\partial z}\beta(s) + \left(\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e\right)\gamma(s)\right] + \\ &+ \left[\alpha(s)\frac{\partial Z_m}{\partial y} - \beta(s)\frac{\partial Z_m}{\partial x}\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Подставляя сюда из (28) и (29) выражения для Z_e и Z_m, учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z}e^{-p_n|z-\zeta|} = -p_n\frac{z-\zeta}{|z-\zeta|}e^{-p_n|z-\zeta|}$$

и затем, пользуясь формулой (35), будем иметь

$$\begin{aligned} R^{(a)} &= \frac{4\pi}{c}\frac{1}{k}\,\mathrm{real}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2\lambda_n\varkappa_n}\int_L\int_L \Psi_n(M)\Psi_n^*(M_0)f(s)f(s')e^{i\varkappa_n|z(s)-\zeta(s')|}\,ds\,ds' + \right. \\ &+ \left.\sum_{n=1}^{N_1}\frac{k^2}{2\hat{\lambda}_n\hat{\varkappa}_n}\int_L\int_L \hat{\Psi}_n(M)\hat{\Psi}_n^*(M_0)f(s)f(s')\,e^{i\hat{\varkappa}_n|z(s)-\zeta(s')|}\,ds\,ds'\right\} = \\ &= \frac{4\pi}{ck}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{real}\,A_n}{2\lambda_n\varkappa_n} + \sum_{n=1}^{N_1}\frac{k^2\,\mathrm{real}\,\hat{A}_n}{2\hat{\lambda}_n\hat{\varkappa}_n}\right\}, \end{aligned} \tag{37}$$

причем

$$M = M\big(x(s),\ y(s),\big)\quad M_0 = M_0\big(x(s'),\ y(s')\big).$$

Найдем действительную часть A_n

$$\begin{aligned} A_n &= \int_L\int_L \Psi_n(M)\Psi_n^*(M_0)f(s)f(s')e^{i\varkappa_n|z(s)-\xi(s')|}\,ds\,ds' = \\ &= \int_L\int_L\left\{-i\varkappa_n\left[\alpha(s)\frac{\partial\psi_n(M)}{\partial x} + \beta(s)\frac{\partial\psi_n(M)}{\partial y}\right]\frac{z(s)-\zeta(s')}{|z(s)-\zeta(s')|} + \right. \\ &+ \left.\lambda_n\gamma(s)\psi_n(M)\right\}\left\{i\varkappa_n\left[\alpha(s')\frac{\partial\psi_n(M_0)}{\partial x_0} + \beta(s')\frac{\partial\psi_n(M_0)}{\partial y_0}\right]\frac{z(s)-\zeta(s')}{|z(s)-\zeta(s')|} + \right. \\ &+ \left.\lambda_n\gamma(s')\psi_n(M_0)\right\}f(s)f(s')e^{i\varkappa_n|z(s)-\zeta(s')|}\,ds\,ds'\Big\} = \int_L\int_L\left\{\varkappa_n^2\left[\alpha(s)\frac{\partial\psi_n(M)}{\partial x} + \right.\right. \\ &+ \left.\beta(s)\frac{\partial\psi_n(M)}{\partial y}\right]\left[\alpha(s')\frac{\partial\psi_n(M_0)}{\partial x_0} + \beta(s')\frac{\partial\psi_n(M_0)}{\partial y_0}\right] + \\ &+ \lambda_n\gamma(s)\gamma(s')\psi_n(M)\psi_n(M_0)f(s)f(s')e^{i\varkappa_n|z(s)-\zeta(s')|}\,ds\,ds'. \end{aligned} \tag{38}$$

Интегралы от перекрестных произведений мы не выписываем, так как они равны нулю, в силу нечетности подинтегрального выражения.

Заметим, что выражение, стоящее в фигурных скобках, есть произведение $\Psi_n(M)\Psi_n^*(M_0)$ при $z \geqslant \zeta$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\operatorname{real} A_n = \int_L \int_L \Psi_n(M)\Psi_n^*(M_0)\cos \varkappa_n |z(s)-\zeta(s')| f(s) f(s')\, ds\, ds' = \\ = \int_L \Psi_n(M) f(s) e^{i\varkappa_n z(s)} ds \int_L \Psi_n^*(M_0) f(s') e^{-i\varkappa_n \zeta(s')} ds'.\end{aligned} \tag{39}$$

Таким образом,

$$\operatorname{real} A_n = \Phi_n(0)\Phi_n^*(0), \tag{40}$$

где $\Phi_n(0)$ определяется из формулы (30).

Аналогично можно показать, что

$$\operatorname{real} \hat{A}_n = \hat{\Phi}_n(0)\hat{\Phi}_n^*(0), \tag{41}$$

где $\hat{\Phi}_n(0)$ находится из (31).

В результате мы приходим к формуле

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{ck}\left\{\sum_{n=1}^{N} \frac{\Phi_n(0)\Phi_n^*(0)}{2\lambda_n \varkappa_n} + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{k^2 \hat{\Phi}_n(0)\hat{\Phi}_n^*(0)}{2\hat{\lambda}_n \hat{\varkappa}_n}\right\}, \tag{42}$$

которая совпадает с формулой (32) для $R^{(a)}$, полученной первым методом.

Рассмотрим полуволновой диполь длины $2l = \frac{\pi}{k}$, параллельный оси z и симметричный относительно плоскости $z = 0$, причем $I = I_0 f(z) = I_0 \cos kz$ $(-l \leqslant z \leqslant l)$.

Несложные вычисления дают

$$A_n = \int_{-l}^{l} d\zeta \int_{-l}^{l} \cos \varkappa_n (z-\zeta)\cos kz \cos k\zeta dz = \frac{4k^2}{\lambda_n^2}\cos^2 \varkappa_n l.$$

Подставляя это значение интеграла A_n в формулу (37), сразу же найдем выражение для сопротивления излучения полуволнового диполя

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c} k \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n^2(M_0)(1+\cos 2\varkappa_n l)}{\lambda_n \varkappa_n} \tag{43}$$

или

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n^2(M_0)\left(1 + \cos\pi\sqrt{1-\gamma_n^2}\right)}{\lambda_n\sqrt{1-\gamma_n^2}}, \text{[5]} \tag{43'}$$

где

$$\gamma_n^2 = \frac{\lambda_n}{k^2}.$$

6. Общие формулы сопротивления излучения (32) дают возможность легко получить результаты Щелкунова [3] и Слэтера [4]. Для удобства сравнения перейдем в наших формулах к практической системе единиц, для чего воспользуемся формулами (2) и (6).

Рассмотрим элементарный электрический ток произвольной ориентации.

В этом случае вычисления с помощью комплексной теоремы Пойнтинга (§ 4) приводят нас к следующему выражению:

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{\omega\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} \frac{\Psi_n(M_0)\Psi_n^*(M_0)}{2\lambda_n\varkappa_n} + \omega\mu l^2 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\hat{\Psi}_n(M_0)\hat{\Psi}_n^*(M_0)}{2\hat{\lambda}_n\hat{\varkappa}_n}, \tag{33'}$$

где $\Psi_n(M_0)$ дается формулой (9), а $\hat{\Psi}_n(M_0)$ — формулой (10).

В указанной выше работе Щелкунов рассматривал элемент тока, параллельный оси круглого цилиндрического волновода. В этом случае

$$\hat{\Psi}_n(M_0) = 0, \quad \Psi_n(M_0) = \lambda_n\psi_n(M_0),$$

и мы получаем

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{\omega\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n\psi_n^2(M_0)}{2\varkappa_n}. \tag{41'}$$

В частном случае круглой мембраны ортогональные и нормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\pi a^2}}\,\frac{J_n(\mu_{mn}\rho)}{J_n'(\mu_{mn})}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, n\varphi, \tag{44}$$

причем $\sigma_n = 2$, если $n \neq 0$ и $\sigma_0 = 1$, μ_{mn} обозначает корень уравнения $J_n(\mu) = 0$, a — радиус перпендикулярного сечения волновода, $\rho = \frac{r}{a}$.

Подставляя в (41') выражение (44) для собственной функции круглой мембраны, сразу же получаем формулу Щелкунова

$$R^{(a)} = \left(\frac{l}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=1}^{N^1} \frac{\sigma_n}{2\pi} \left[\frac{J_n\left(\mu_{mn}\frac{b}{a}\right)}{J_n'(\mu_{mn})}\right]^2 \frac{\nu_{mn}^2}{\sqrt{1-\nu_{mn}^2}}, \tag{45}$$

где $\nu_{mn}^2 = \frac{\lambda_{mn}}{k^2}$; $\mu_{mn}^2 = \lambda_{mn}a^2$; b — расстояние диполя от оси z.

[5] Частный случай этой формулы, относящийся к круглому волноводу (диполь на оси), см. в работе [5].

Нетрудно получить аналогичным способом и формулу для сопротивления излучения $R^{(a)}$ элемента магнитного тока, параллельного оси z. Как указывалось в работе [1], задача о возбуждении волновода магнитным током, параллельным оси волновода, решается с помощью второй функции источника

$$\widehat{\Pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_n(M)\widehat{\psi}_n(M_0)}{2\widehat{p}_n} e^{-\widehat{p}_n|z-\zeta|}. \tag{46}$$

Формулы (2') в этом случае остаются в силе, однако следует положить $Z_e = 0$; $Z_m = \widehat{Z}$, причем $\widehat{Z} = Kl\widehat{\Pi}$,[6] где K — сила магнитного тока l — длина элемента тока. В силу известной теоремы об эквивалентности магнитного тока петле S_0 с электрическим током I имеет место равенство

$$Kl = -i\omega\mu S_0 I.$$

Сопротивление излучения будет выражаться формулой

$$R^{(a)} = \omega\mu S_0^2 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\widehat{\lambda}_n \widehat{\psi}_n^2(M_0)}{2\widehat{\varkappa}_n}. \tag{47}$$

Пользуясь выражением для ортонормированных собственных функций $\widehat{\psi}_n(M)$ круглой мембраны S

$$\widehat{\psi}_n(M) = \widehat{\psi}_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\pi a^2}} \frac{\widehat{\mu}_{mn}}{\sqrt{\widehat{\mu}_{mn}^2 - n^2}} \frac{J_n\left(\frac{\widehat{\mu}_{mn} r}{a}\right)}{J_n(\widehat{\mu}_{mn})} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi, \tag{48}$$

где $\widehat{\mu}_{mn}$ — корень уравнения $J_n'(\mu) = 0$ $\left(\widehat{\mu}_{mn}^2 = \frac{\widehat{\lambda}_{mn}}{a^2}\right)$, получаем из (47) вторую формулу Щелкунова для сопротивления излучения $R^{(a)}$ элемента магнитного тока

$$R^{(a)} = \left(\frac{S_0}{a^2}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1'} \frac{\sigma_n}{2\pi} \frac{\widehat{\mu}_{mn}^4}{\widehat{\mu}_{mn}^2 - n^2} \left[\frac{J_n\left(\widehat{\mu}_{mn}\frac{b}{a}\right)}{J_n(\widehat{\mu}_{mn})}\right]^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \widehat{\nu}_{mn}^2}}. \tag{49}$$

Здесь $\widehat{\nu}_{mn}^2 = \frac{\widehat{\lambda}_{mn}}{k^2}$.

Перейдем теперь к прямоугольному волноводу. Пусть оси x и y координатной системы параллельны сторонам a и b перпендикулярного сечения, в одной из вершин которого находится начало координат.

---

[6] Условие возбуждения имеет вид $\oint_{K_\varepsilon} E_S\, ds = K$.

Поместим в точку (d, y_0) элемент тока, параллельный оси y.

Ортонормированные собственные функции прямоугольной мембраны имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(M) &= \psi_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi m}{a} x \sin\frac{\pi n}{b} y \\ \hat{\psi}_n(M) &= \hat{\psi}_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{\sigma_m \sigma_n}{ab}} \cos\frac{\pi m}{a} x \cos\frac{\pi n}{b} y. \end{aligned} \quad (\sigma_i = 2,\ j \neq 0,\ \sigma_j = 1)\right\}. \tag{50}$$

Сопротивление излучения элемента тока, направленного вдоль оси y,

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{\omega\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varkappa_n \left[\frac{\partial\psi_n(M_0)}{\partial y_0}\right]^2}{2\lambda_n} + \omega\mu l^2 \sum_{n=0}^{N_1} \frac{\left[\frac{\partial\hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0}\right]^2}{2\hat{\varkappa}_n \hat{\lambda}_n}. \tag{51}$$

Наиболее интересной для практики является волна H_{10}. В этом случае

$$\psi_{10} = 0,\ \hat{\psi}_{10}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\frac{\pi}{a} x,\ \hat{\lambda}_{10} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \ (N = 0,\ N_1 = 1,$$

и для $R^{(a)}$ получаем формулу Слэтера [4]

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{ab} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sin^2\frac{\pi}{a} d}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ak}\right)^2}}. \tag{52}$$

Отметим, что специфические особенности метода отражений, с помощью которого была ранее получена формула (52) (Слэтер, Вольман), приводят к ряду трудностей аналитического характера, которые пришлось преодолеть названным авторам.

Литература

[1] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов. ЖТФ, *XVII*, 1283, 1947. — [2] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов. ЖТФ, *XVII*, 1431, 1947. — [3] S. A. Schelkunoff. Proc. Inst. Rad. Eng., *24*, 1383, 1936. — [4] Дж. Слэтер. Передача ультракоротких радиоволн, ГТТИ, гл. VIII, М. — Л., 1946. — [5] М. Л. Левин. ДАН СССР, *54*, 693, 1946. — [6] S. A. Schelkunoff. Electromagnetic waves, New York, 129, 1945. — [7] V. A. Fock. Ann. d. Phys., *17*, 401, 1933. — [8] М. Л. Левин. ДАН СССР *54*, 599, 1946. — [9] М. Л. Левин. ДАН СССР, *54*, 133, 1946.

Научно-исследовательский институт физики Московского Государственного университета

Поступило в Редакцию 24 января 1948 г.