О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ В ВИДЕ СУММЫ ПОЛЕЙ TE и TM

А. А. Самарский и *А. Н. Тихонов*

Несмотря на то, что утверждение о возможности разложения произвольного поля в волноводе на сумму трансверсального электрического поля TE и трансверсального магнитного поля TM неоднократно высказывалось рядом авторов,[1] однако мы нигде не встречали какого-либо доказательства этого, казалось бы, очевидного факта. Целью настоящей статьи является проведение строгого математического доказательства полноты системы TE и TM полей для волновода произвольной формы. Таким образом, будет доказано, что любое электромагнитное поле в волноводе может быть представлено при помощи двух векторов Герца, имеющих лишь по одной отличной от нуля компоненте. Тем самым проблема определения электромагнитных полей в волноводе сводится к задаче нахождения двух скалярных функций Z_e и Z_m (продольных компонент электрического и магнитного векторов Герца).

1. Пусть в направлении оси z простирается бесконечный полный цилиндр Σ с идеально проводящими стенками, поперечным сечением S, форма которого определяется кривой C. В плоскости перпендикулярного сечения S расположены оси x и y.

Для электромагнитного поля внутри такого волновода, в силу идеальной проводимости стенок, имеет место граничное условие

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} E_z &= 0 \\ H_n &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Каждая из компонент E_z и H_z удовлетворяет волновому уравнению, краевым условиям

$$E_z = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma \tag{2}$$

и принципу излучения на бесконечности, который мы берем в виде отсутствия волн, приходящих из бесконечности.

Рассмотрим некоторое электромагнитное поле внутри волновода, зависящее от времени по закону $e^{-i\omega t}$ (этот фактор, как обычно, опускаем), регулярное всюду в области $z > 0$. Покажем, что это поле можно представить в виде суммы полей

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ \vec{H} &= \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

[1] См., например, Stratton. Electromagnetic theory. New Jork, 1941. — Введенский и Аренберг. Радиоволноводы, ОГИЗ, М. — Л., 1946.

причем $E_{2z}=0$ и $H_{1z}=0$, т. е. первое поле $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$ является трансверсальным магнитным, а второе — трансверсальным электрическим.

Если $\vec{Z}_e$ и $\vec{Z}_m$ — электрический и магнитный векторы Герца, то можно записать (3) следующим образом

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}&=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}_e+k^2\vec{Z}_e+ik\operatorname{rot}\vec{Z}_m\\ \vec{H}&=-ik\operatorname{rot}\vec{Z}_e+\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}_m+k^2\vec{Z}_m\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$
$$\left(k=\frac{\omega}{c}\right)$$

причем $\vec{Z}_e$ и $\vec{Z}_m$ имеют лишь по одной отличной от нуля компоненте вдоль оси волновода (оси z), так что

$$\vec{Z}_e=Z_e\cdot\vec{i}_3;\ \vec{Z}_m=Z_m\cdot\vec{i}_3,$$

где $\vec{i}_3$ — орт оси Oz.

Переходя в (4) к отдельным компонентам поля, получим

$$\left.\begin{aligned}E_x&=\frac{\partial^2 Z_e}{\partial x\partial z}+ik\frac{\partial Z_m}{\partial y} & H_x&=-ik\frac{\partial Z_e}{\partial y}+\frac{\partial^2 Z_m}{\partial x\partial z}\\ E_y&=\frac{\partial^2 Z_e}{\partial y\partial z}-ik\frac{\partial Z_m}{\partial x} & H_y&=ik\frac{\partial Z_e}{\partial x}+\frac{\partial^2 Z_m}{\partial y\partial z}\\ E_z&=\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2}+k^2 Z_e & H_z&=\frac{\partial^2 Z_m}{\partial z^2}+k^2 Z_m\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Мы должны доказать возможность определения векторов Z_e и Z_m по заданному полю $\{\vec{E}, \vec{H}\}$. Как будет показано, для определения Z_e и Z_m достаточно использовать не все компоненты поля, а лишь две его составляющие E_z и H_z, которые тем самым полностью определяют все остальные компоненты поля.

Тогда векторы Герца Z_e и Z_m должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2}+k^2 Z_e=E_z,\qquad \frac{\partial^2 Z_m}{\partial z^2}+k^2 Z_m=H_z, \tag{6}$$

а также волновым уравнениям

$$\Delta Z_e+k^2 Z_e=0,\qquad \Delta Z_m+k^2 Z_m=0. \tag{7}$$

Мы будем определять функции Z_e и Z_m из уравнений

$$\left.\begin{aligned}\Delta_2 Z_e&=-E_z(x, y, z)\\ \Delta_2 Z_m&=-H_z(x, y, z)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(Δ_2 — двухмерный оператор Лапласа), которые должны выполняться в силу (6) и (7).

Кроме того, Z_e и Z_m должны удовлетворять краевым условиям

$$Z_e=0;\quad \frac{\partial Z_m}{\partial n}=0 \text{ на } \Sigma. \tag{9}$$

2. Уравнения (8) представляют собой уравнения Пуассона и могут быть без труда решены с помощью соответствующей функции Грина

$$Z_e(M, z) = \iint\limits_{(S)} G_2(M, \overline{M}) E_z(\overline{M}, z)\, d\sigma_{\overline{M}}, \tag{10}$$

$$Z_m(M, z) = \iint\limits_{(S)} \hat{G}_2(M, \overline{M}) H_z(\overline{M}, z)\, d\sigma_{\overline{M}}, \tag{11}$$

где $G_2(M, \overline{M})$ — функция Грина закрепленной мембраны; $\hat{G}_2(M, \hat{M})$ — функция Грина свободной мембраны; $M(x, y)$ и $\overline{M}(\xi, \eta)$ — точка наблюдения и точка интегрирования в плоскости перпендикулярного сечения.

Такое определение является однозначным и возможно для тех областей S, для которых существует функция Грина.

Покажем, что функции $Z_e(M, z)$ и $Z_m(M, z)$, определяемые формулами (10) и (11), удовлетворяют волновым уравнениям (7) и тем самым уравнениям (6).

Как показано в „Добавлении", функции E_z и H_z имеют непрерывные производные по z в области $z > 0$. Отсюда следует существование z-производных функций Z_e и Z_m, которые можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. При этом особенности функции Грина никаких осложнений не вызывают.

Поэтому

$$\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e = \iint\limits_{(S)} G_2(M, \overline{M}) \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z(\overline{M}, z)\right] d\sigma_{\overline{M}}. \tag{12}$$

Учитывая, что

$$\Delta_2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0, \tag{13}$$

получим

$$\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e = -\iint\limits_{(S)} G_2(M, \overline{M}) \Delta_2 E_z(\overline{M}, z)\, d\sigma_{\overline{M}}.$$

Последний интеграл, в силу свойства функции Грина, равен $E_z(M, z)$. Пользуясь, наконец, определяющим функцию $Z_e(M, z)$ уравнением (8), находим

$$\Delta Z_e + k^2 Z_e = 0.$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$\Delta Z_m + k^2 Z_m = 0.$$

В уравнениях (8) переменная z играет роль параметра. Функции $Z_e(M, z)$ и $Z_m(M, z)$ в каждом перпендикулярном сечении при фиксированном z полностью определяются значениями E_z и соответственно H_z в этом сечении. Нетрудно видеть из (10) и (11), что Z_e и Z_m удовлетворяют принципу излучения при $z \to \infty$, так как этот принцип имеет место для величин $E_z(M, z)$ и $H_z(M, z)$.

3. Итак, считая поле заданным всюду в области $z > 0$ и беря только две компоненты поля E_z и H_z, мы нашли векторы Герца $\vec{Z}_e$ и $\vec{Z}_m$, которым, согласно формулам (4), соответствует некоторое поле $\{\vec{\hat{E}}, \vec{\hat{H}}\}$, которое мы будем называть вычисленным полем. При этом, очевидно,

$$\hat{E}_z = E_z, \quad \hat{H}_z = H_z.$$

Мы должны доказать тождество поля вычисленного $\{\vec{\hat{E}}, \vec{\hat{H}}\}$ с полем заданным $\{\vec{E}, \vec{H}\}$.

С этой целью подставим вычисленные по (10) и (11) величины Z_e и Z_m в уравнения (5) и затем воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\vec{H} = -ik\vec{E}, & \operatorname{div} E = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{E} = ik\vec{H}, & \operatorname{div}\vec{H} = 0 \end{array}\right\}. \tag{14}$$

Тогда будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \hat{E}_x}{\partial y} = ik\hat{H}_z \\ \dfrac{\partial \hat{E}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \hat{E}_y}{\partial y} = -\dfrac{\partial \hat{E}_z}{\partial z} \end{array}\right\}. \tag{15}$$

Такие же соотношения, очевидно, имеют место и для заданных полей $\{\vec{E}, \vec{H}\}$. При этом на границе Σ выполняется краевое условие

$$\hat{E}_s = \alpha\hat{E}_x + \beta\hat{E}_y = 0$$

и соответственно

$$E_s = \alpha E_x + \beta E_y = 0.$$

Здесь α и β — косинусы тангенциального направления $\vec{s}$ в плоскости xy. Вводя функции

$$\left.\begin{array}{l} E_x^0 = E_x - \hat{E}_x \\ E_y^0 = E_y - \hat{E}_y \end{array}\right\} \tag{16}$$

и учитывая (13), получим

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial E_y^0}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x^0}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial E_x^0}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y^0}{\partial y} = 0 \end{array}\right\}, \tag{17}$$

$$\alpha E_x^0 + \beta E_y^0 = 0 \text{ на } C. \tag{18}$$

Нетрудно видеть отсюда, что уравнения (17) с граничным условием (18) представляют собой известную проблему Гильберта.

Найти две сопряженные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ внутри области S, определяемые условиями

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \text{ внутри } S, \tag{19}$$

$$\alpha u + \beta v = F(s) \text{ на } C, \tag{20}$$

где $F(s)$ — некоторая заданная на контуре C функция дуги s.

Проблема Гильберта, как известно, имеет единственное решение. В силу однородности краевого условия (18), отсюда следует, что

$$E_x^0 \equiv 0, \quad E_y^0 \equiv 0, \tag{21}$$

т. е.

$$\hat{E}_x \equiv E_x, \quad \hat{E}_y \equiv E_y.$$

Так как, согласно (13), $\hat{E}_z = E_z$, $\hat{H}_z = H_z$, то из уравнения Максвелла

$$ik\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{E}$$

сразу же вытекает, что

$$\hat{H}_x \equiv H_x, \quad \hat{H}_y \equiv H_y.$$

Таким образом, доказано полное совпадение полей вычисленных с полями заданными

$$\hat{\vec{E}} = \vec{E},$$

$$\hat{\vec{H}} = \vec{H}.$$

Этим самым установлено, что всякое электромагнитное поле в волноводе полностью определяется его компонентами E_z и H_z, откуда, в частности, согласно вышеизложенному, и следует возможность представления любого поля в волноводе в виде суммы поперечного электрического TE и поперечного магнитного TM полей, в области, где отсутствуют источники.

Добавление

Пусть нам задана функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая внутри бесконечной цилиндрической области V уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$, непрерывная в замкнутой области и обращающаяся в 0 на границе. Докажем, что производные этой функции по переменному z непрерывны в области V и на ее границе.

Рассмотрим область T, вырезанную из V двумя параллельными плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$, находящимися на расстоянии l друг от друга. Пусть

$$u(x, y, z_1) = f_1(x, y) \quad \text{и} \quad u(x, y, z_2) = f_2(x, y),$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — непрерывные функции, определенные внутри S и обращающиеся в 0 на C.

Найдем решение уравнения

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0$$

для области T, считая функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ заданными; при этом $u(x, y, z)$ должно обращаться в нуль на боковой поверхности Σ $\left(\text{или } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma\right)$.

К а к и з в е с т н о, у р а в н е н и е $\Delta u + k^2 u = 0$ и м е е т е д и н с т в е н н о е р е ш е н и е д л я о б л а с т и д о с т а т о ч н о м а л о г о о б ъ е м а [1].

При этом мы считаем l настолько малым, что в рассматриваемой области T решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ однозначно определяется своими краевыми значениями. Построим решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ для области T методом разделения переменных. Положим

$$U = U_1 + U_2, \tag{22}$$

где

$$\left.\begin{aligned} U_1(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, y) f_1^{(n)} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}(l - z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} l} \\ U_2(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, y) f_2^{(n)} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} l} \end{aligned}\right\}, \tag{23}$$

где $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$ — коэффициенты Фурье разложения функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ по собственным функциям $\psi_n(x, y)$.

Рассмотрим сначала функцию $U_1(x, y, z)$.

Если $f(x, y)$ истокообразно представима при помощи функции Грина плоской области S, то согласно теореме Гильберта — Шмидта [2] $\Sigma \psi_n f^{(n)}$ равномерно и абсолютно сходится, а следовательно, сходится и наш ряд (23).

Функция $U_1(x, y, z)$ удовлетворяет условиям на боковых стенках цилиндра T и при $z = z_1 = 0$ и обращается в нуль при $z = z_2 = l$; аналогично функция $U_2(x, y, z)$ удовлетворяет краевым условиям на Σ и при $z = z_2 = l$ и исчезает при $z = 0$. Поэтому функция

$$U(x, y, z) = U_1(x, y, z) + U_2(x, y, z)$$

удовлетворяет всем поставленным краевым условиям.

Построенное решение (17) справедливо для функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, представимых истокообразно. Покажем, что эти же формулы сохраняют силу для любых непрерывных функций f_1 и f_2, обращающихся в 0 на C. Для этого нами будет доказана следующая теорема.

Функция

$$\left.\begin{aligned} U_1(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, y) f_1^{(n)} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2}(l - z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n - k^2} l} \quad \text{для } z > 0 \\ U_1(x, y, z) &= f_1(x, y), \quad \text{для } z = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{24}$$

где $f_1(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в S и обращающаяся в 0 на C, а $f_1^{(n)}$ ее коэффициент Фурье, 1) удовлетворяет уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$ внутри области T; 2) непрерывна в замкнутой области T и обращается в 0 на Σ и при $z = l$, а при $z = 0$ равна $f_1(x, y)$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится:

Лемма [3]. Нормированные собственные функции $\psi_n(x, y)$ растут не быстрее $A_1 \lambda_n$, где A_1 некоторая константа, т. е.

$$|\psi_n(x, y)| \leqslant A_1 \lambda_n. \tag{25}$$

Для первых производных имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right| < A_2\lambda_n^2, \quad \left|\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\right| < A_2\lambda_n^2, \tag{26}$$

а для вторых производных — оценки

$$\left|\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}\right| < A_3\lambda_n^3, \quad \left|\frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2}\right| < A_3\lambda_n^3, \tag{27}$$

справедливые для всякой области, целиком лежащей внутри S.

Из (25) следует, что коэффициенты Фурье $f^{(n)}$ непрерывной функции $f(x, y)$

$$|f^{(n)}| \leqslant \overline{M}_f A_1 \lambda_n S = B \cdot \lambda_n,$$

где $\overline{M}_f$ — максимум функции $f(x, y)$, а S — площадь области.

На основании этих оценок ясно, что ряд, определяющий функцию $U_1(x, y, z)$, сходится равномерно в области $z > \overline{z}$, где $\overline{z}$ — произвольное число, большее нуля. Учитывая оценки (25) — (27), нетрудно убедиться в том, что ряды для первых производных равномерно сходятся внутри той же области, а ряды для вторых производных сходятся равномерно для всякой внутренней к S области для $z > \overline{z}$.

Отсюда вытекает, что функция $U_1(x, y, z)$ дифференцируема дважды для всякой внутренней точки при $z > \overline{z}$ и удовлетворяет уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$. Кроме того, эта функция непрерывна при $z > \overline{z}$ и обращается в 0 на Σ и при $z = l$.

Таким образом, нам остается выяснить непрерывность функции U_1 при $z = 0$.

Убедимся, прежде всего, в том, что решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ монотонно зависит от граничных значений. Для этого достаточно убедиться в том, что если на границе функция $u \geqslant 0$, то она не может внутри области иметь отрицательных значений; если же на границе $u \leqslant 0$, то внутри области u не может достигать положительных значений. В самом деле, допустим, что $u \geqslant 0$ на границе, а внутри области может принимать отрицательные значения. Пусть $\mathfrak{M}$ область, в точках которой $u < 0$. Тогда на границе области $\mathfrak{M}$ функция $u(x, y, z)$ должна обращаться в нуль. Но в таком случае, в силу отмеченной выше теоремы единственности для достаточно малой области T, функция $u(x, y, z) \equiv 0$ в области $\mathfrak{M}$, что противоречит исходному предположению. Отсюда сразу же следует, что если краевые значения функции u' больше краевых значений функции u'', то это же неравенство имеет место всюду в области определения функций u' и u''.

Очевидно, что можно написать

$$U_1(M, z) = \iint\limits_{(S)} f(M_0) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M)\psi_n(M_0) \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n - k^2}(l - z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n - k^2}\, l} \right\} d\sigma_{M_0}. \tag{28}$$

Если $f(x, y)$ истокообразно представимая функция, то функция $U_1(x, y, z)$ при $z = 0$ принимает краевые значения f в силу равномерной и абсолютной сходимости ряда Фурье — Гильберта. Отсюда и на основании предшествующего заключаем, что если истокообразно представимая функция $f > 0$, то и $U > 0$.

Так как это справедливо для произвольной истокообразно представимой функции $f>0$, то

$$K(M,\ z;\ M_0,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(M)\psi_n(M_0)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n-k^2}\,(l-z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n-k^2}}>0. \tag{29}$$

Докажем теперь, что интеграл

$$\iint\limits_{(S)}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(M)\psi_n(M_0)\frac{\operatorname{sh}\ \sqrt{\lambda_n-k^2}\,(l-z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n-k^2}\,l}\right\}d\sigma_{M_0}=$$

$$=\iint\limits_{(S)}K(M,z;M_0,0)\,d\sigma_{M_0}<B_1 \tag{30}$$

где B_1 — некоторая константа.

Рассмотрим возрастающую последовательность областей

$$S_1,\ S_2,\dots,\ S_n\dots,$$

сходящуюся к области S, и определим последовательность монотонно возрастающих, истокообразно представимых неотрицательных функций f_n, обладающих следующими свойствами

$$f_n(x,\ y)=\begin{cases}1 & \text{в}\quad S_n\\ 0 & \text{на}\quad C\end{cases}. \tag{31}$$

Возможность построения таких функций не вызывает сомнений. Функция

$$u_n(x,\ y,\ z)=\iint\limits_{(S)}f_n(\xi,\eta)K(x,y,z;\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta \tag{32}$$

есть решение уравнения $\Delta u+k^2u=0$, краевые значения которого всюду $\leqslant 1$. Поэтому

$$u_n\leqslant U_0,$$

где U_0 — то решение нашего уравнения, которое соответствует краевым значениям, равным 1. Обозначим максимум этого решения через B_1. Тогда получаем

$$\iint\limits_{(S)}K(x,y,z;\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S)}f_n(\xi,\eta)K(x,y,z;\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta<B_1 \tag{33}$$

для всякой точки (x,y,z), лежащей внутри T. Эта оценка потребуется нам в дальнейшем.

Переходим теперь непосредственно к доказательству непрерывности функции $u(M,z)$ при $z=0$ в любой точке $M_0\subset S$.

Пусть задано некоторое $\varepsilon>0$. Построим такую окрестность W_{M_0} точки M_0, чтобы $|u(M,z)-f(M_0)|<\varepsilon$ для любой точки $(M,z)\subset W_{M_0}$.

Проведем некоторую кривую C_1, расположенную внутри кривой C и достаточно близко к ней подходящую. Область, ограниченную кривыми C и C_1, которую мы обозначим через L, выберем настолько малой, что выполняется неравенство

$$\iint\limits_{(L)} fK\,d\sigma < \frac{\varepsilon}{3},$$

что очевидно в силу доказанной выше оценки (26) для $\iint K\,d\sigma$, положительности K и малости f в области L ($f=0$ на C). Подберем окрестность $U_\omega \subset S$ точки M_0 таким образом, чтобы колебание $f(M)$ в этой окрестности было меньше $\omega = \frac{\varepsilon}{3}$. Положим $\overline{f}(M) = f(M_0) + \omega$ для точек M, принадлежащих окрестности U_ω. Очевидно, что и внутри области U_ω функция $\overline{f}(M) > f(M)$.

Определим функцию $\overline{f}$ для остальных точек области S так, чтобы она была истокообразно представимой и удовлетворяла требованиям

$$\overline{f} > f \quad \text{в области} \quad S - U_\omega - L,$$

$$\overline{f} > 0 \quad \text{в области } L,$$

$$\overline{f} = 0 \quad \text{на } C,$$

в остальном же функция $\overline{f}$ произвольна.

Очевидно, что

$$\overline{u} - u > -\frac{\varepsilon}{3}.$$

В самом деле,

$$\overline{u} - u = \iint\limits_{(S-L)} (\overline{f} - f) K\,d\sigma + \iint\limits_{(L)} \overline{f} K\,d\sigma - \iint\limits_{(L)} fK\,d\sigma.$$

Так как

$$\iint\limits_{(S-L)} (\overline{f} - f) K\,d\sigma \geqslant 0$$

и

$$\iint\limits_{(L)} \overline{f} K\,d\sigma \geqslant 0$$

и, кроме того, согласно сделанному выше предположению,

$$\iint\limits_{(L)} fK\,d\sigma < \frac{\varepsilon}{3},$$

то

$$\overline{u} - u > -\frac{\varepsilon}{3}.$$

Из непрерывности функции $\bar{u}$ вытекает существование такой окрестности $\overline{W}_{M_0}$, что

$$\bar{u}(M) - \left[f(M_0) + \frac{\varepsilon}{3}\right] < \frac{\varepsilon}{3}$$

или

$$\bar{u}(M) < \left[f(M_0) + \frac{2\varepsilon}{3}\right].$$

Поэтому

$$u(M) - f(M_0) < \left[\bar{u}(M) + \frac{\varepsilon}{3}\right] - f(M_0) <$$

$$< \left[\left(f(M_0) + \frac{2\varepsilon}{3}\right) + \frac{\varepsilon}{3}\right] - f(M_0) = \varepsilon,$$

т. е.

$$u(M) - f(M_0) < \varepsilon$$

для любой точки M, принадлежащей окрестности $\overline{W}_{M_0}$.

С другой стороны, строя совершенно аналогичным образом функцию $\underline{f}$, можно установить, что

$$u(M) - f(M_0) \geqslant -\varepsilon \tag{34}$$

для любой точки M, принадлежащей окрестности $\underline{W}_{M_0}$.

Отсюда следует

$$|u(M) - f(M_0)| < \varepsilon \tag{35}$$

для любой точки $M \subset \overline{W}_{M_0} \cdot \underline{W}_{M_0}$, что и показывает непрерывность $u(M)$ в произвольной точке M_0 при $z=0$.

Нетрудно видеть, что для точек, лежащих на границе, рассуждения существенно не меняются, чем и доказана непрерывность функции U_1 в замкнутой области T.

Точно таким же путем можно установить непрерывность функции U_2, а следовательно, на основании предыдущего, и функции $U = U_1 + U_2$ в замкнутой области T.

Теорема доказана.

Таким образом, мы получили явное выражение для функции $u(x, y, z)$ в области $z_1 < z < z_2$ через ее значения при $z = z_1$ и $z = z_2$. Из этого представления следует, что $\frac{\partial^k u}{\partial z^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ является непрерывной функцией в точке (M, z), где M произвольная точка замкнутой области $S + C$, а $\bar{z}_1 < z < \bar{z}_2$, причем

$$z_1 < \bar{z}_1 < \bar{z}_2 < z_2.$$

Установление этого факта и являлось основной целью данного добавления. Отметим, далее, что из доказанной непрерывности $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ следует, что

$$\Delta_2 u = -F(x, y, z) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u\right), \tag{36}$$

где $F(x, y, z)$ — непрерывная функция.

Следовательно, функция $u(x, y, z)$ представима истокообразно через функцию Грина $G_2(M, M_0)$ для плоской области S, т. е.

$$u(M, z) = \iint_{(S)} G_2(M, M_0) F(M_0, z)\, d\sigma_{M_0} \tag{37}$$

и в силу теоремы Гильберта — Шмидта разлагается в равномерно абсолютно сходящийся ряд

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \psi_n(M), \tag{38}$$

где

$$f_n(z) = \iint_{(S)} u(M, z) \psi_n(M)\, d\sigma_M$$

коэффициент Фурье функции u. Очевидно, что функция $f_n(z)$ дифференцируема по z сколько угодно раз в силу доказанной непрерывности для $\frac{\partial^k u}{\partial z^k}$ (для $\bar{z}_1 < z < \bar{z}_2$ и $M \subset S + C$).

Нетрудно убедиться в том, что $f_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_n}{dz^2} + (k^2 - \lambda_n) f_n(z) = 0. \tag{39}$$

Действительно,

$$\frac{d^2 f_n(z)}{dz^2} = \iint_{(S)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \psi_n(M)\, d\sigma_M = - \iint_{(S)} (\Delta_2 u + k^2 u) \psi_n\, d\sigma =$$

$$= - \iint_{(S)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta_2 \psi_m + k^2 \psi_m) f_m \right\} \psi_n(M)\, d\sigma_M =$$

$$= - \iint_{(S)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (k^2 - \lambda_m) \psi_m f_m \right\} \psi_n(M)\, d\sigma_M .$$

В последнем интеграле допустимо почленно интегрирование в силу установленного выше вида функции $f_n(z)$, что нам дает

$$\frac{d^2 f_n}{dz^2} = -(k^2 - \lambda_n) f_n(z).$$

Таким образом, нами также показано, что произвольное решение волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

определенное в бесконечной цилиндрической области V и обращающееся в 0 на границе, может быть представлено в виде

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M) f_n(z),$$

где $f_n(z)$ определяется уравнением (39).

Литература

[1] В. В. Немыцкий. Математический сб., *1 (43)*, 4, 1936. — [2] — И. И. Привалов. Интегральные уравнения, 129, ОНТИ, 1935. — [3] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ, *XVII*, 1283, 1947.

Поступило в Редакцию
12 июля 1947 г.