Т. 18. Журнал экспериментальной и теоретической физики. Вып. 2

1948

О ПРИНЦИПЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Н. Тихонов и *А. А. Самарский*

Сформулирован общий принцип излучения для волнового уравнения (1) в том смысле, что решениями, удовлетворяющими этому принципу, являются предельные (при $t \to \infty$) решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями для соответствующего уравнения колебаний (1а). Показано, что для неограниченного пространства названный метод приводит к решениям, удовлетворяющим известному условию Зоммерфельда.

Решение волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -F(M) \quad [M = (x, y, z)], \tag{1}$$

в неограниченной области Ω не всегда однозначно определяется заданием значения функции $v(M)$[1] (или ее нормальной производной $\partial v/\partial n$) на поверхности Σ, являющейся границей области Ω. Например, если область Ω является внешней областью к замкнутой поверхности Σ, то для выделения единственного решения, являющегося расходящейся волной $v = v(M)$, к граничным условиям на Σ добавляют условие излучения Зоммерфельда [1], которое можно записать в виде:

$$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv\right) = 0. \tag{2}$$

Однако это условие видоизменяется в тех случаях, когда граница Σ простирается в бесконечность. Так, для плоской области (цилиндрические волны) имеет место следующее условие [2]:

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0. \tag{2'}$$

Для случая одного независимого переменного (плоские волны) условие излучения имеет вид:

$$\lim_{r \to \infty} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0. \tag{2''}$$

Для областей другого типа, как например, для слоя между двумя параллельными плоскостями или бесконечной цилиндрической области, оказывается необходимым вводить не одно, а несколько условий в форме условий Зоммерфельда („парциальный принцип излучения"). В связи с этим возникает вопрос об установлении единообразного принципа выделения „расходящейся волны" (принцип излучения), независимого от формы области.

Понятие расходящейся волны тесно связано с понятием установившегося режима:

$$u = ve^{-i\omega_0 t} \tag{3}$$

[1] В дальнейшем будем принимать это значение равным нулю.

удовлетворяющего уравиению колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(M)\,e^{-i\omega_0 t} \qquad \left(k^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}\right). \tag{1a}$$

(При рассмотрении установившегося режима обычно множитель $e^{-i\omega_0 t}$ опускается.)

С этой точки зрения функцию $v(M)$ — амплитуду установившегося режима — естественно трактовать как предел:

$$v(M) = \lim_{t \to \infty} u(M, t)\, e^{i\omega_0 t}, \tag{4}$$

где функция $u(M, t)$ определяется силами, периодически действующими с той же частотой ω_0 и с амплитудой, равной величине сил, определяющих функцию $v(M)$.

Для получения расходящейся волны $v(M)$ будем брать функцию $u(M, t)$, удовлетворяющую нулевым начальным условиям Коши:

$$u(M, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) = 0. \tag{5}$$

По самому характеру постановки задачи ясно, что функция $u(M, t)$, а тем самым и функция $v(M)$, если только она существует, определяются однозначно.

В настоящей статье мы покажем, что решение, выделяемое с помощью предлагаемого принципа излучения, совпадает с решением, определяемым принципом излучения Зоммерфельда для неограниченного пространства[2].

1. Рассмотрим неоднородное волновое уравнение (1) в неограниченном пространстве, считая, что функция $F(M)$ является локальной функцией, т. е. отлична от нуля в ограниченной части пространства G.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее принципу излучения Зоммерфельда в форме (2), имеет вид:

$$v(M) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G \frac{e^{ikr}}{r_{M\overline{M}}}\, F(\overline{M})\, d\tau_{\overline{M}} \tag{6}$$

($d\tau_{\overline{M}} = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ — элемент объема).

Рассмотрим функцию $u(M, t)$, удовлетворяющую уравнению (1а) и начальным условиям (5). Функция $u(M, t)$, представляющая решение задачи Коши, определена однозначно.

Покажем, что имеет место соотношение (4), т. е. что функция $v(M)$ может быть определена как амплитуда режима, установившегося под действием силы $F(M)e^{-i\omega_0 t}$ при нулевых начальных условиях. При этом предполагается, что функция $F(M)$ удовлетворяет достаточно высоким требованиям дифференцируемости.

2. Рассмотрим вспомогательную функцию $u_1(M, t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\Delta u_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -F(M)\varphi(t), \quad \text{где } \varphi(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t} & \text{для } 0 < t \leqslant T, \\ 0 & \text{для } t > T, \end{cases} \tag{7}$$

[2] Как нам стало известно в период подготовки настоящей работы к печати, аналогичным вопросом занимался А. А. Соколов, следуя методам, изложенным в его монографии „Дельта-функция и ее применение к решению некоторых математических задач геофизики" (Свердловск, 1946 г.).

и начальным условиям:

$$u_1(M,0)=0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}(M,0)=0. \tag{7'}$$

Величина T представляет собой параметр, который мы в дальнейшем устремим к бесконечности. Очевидно, что в области $t\leqslant T$ функция $u_1(M,t)=u(M,t)$.

Введем функцию $\bar{u}(M,t)$ с помощью соотношения

$$\bar{u}(M,t)=\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} u_1(M,\theta)\,d\theta. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться в том, что для этой функции справедливы условия:

$$\Delta\bar{u}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=-F(M)\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}\varphi(\theta)\,d\theta, \tag{9}$$

$$\bar{u}(M,0)=0, \qquad \frac{\partial\bar{u}}{\partial t}(M,0)=0, \tag{9'}$$

которые функцию $\bar{u}(M,t)$ определяют однозначно.

Очевидно, что

$$u_1(M,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}(M,t). \tag{8'}$$

3. Совершим над $\bar{u}(M,t)$ преобразование Лапласа, в результате чего получим лапласову сопряженную функцию:

$$\frac{\bar{v}(M,\gamma)}{\gamma}=\int_0^\infty \bar{u}(M,t)\,e^{-\gamma t}\,dt, \tag{10}$$

определенную в области $\operatorname{Re}\gamma=\alpha>\alpha_0>0$, так как функция $\bar{u}(M,t)$, очевидно, является функцией, ограниченной равномерно относительно всех ее аргументов.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (9) и учитывая начальные условия для функции $\bar{u}(M,t)$, легко находим:

$$\Delta\bar{v}-\frac{\gamma^2}{c^2}\bar{v}=-F(M)B(\gamma), \tag{11}$$

где

$$B(\gamma)=\gamma\int_0^\infty dt\,e^{-\gamma t}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}\varphi(\theta)\,d\theta.$$

Интегрируя по частям, преобразуем правую часть к виду:

$$B(\gamma)=\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma}\varphi(t)\,dt=\int_0^T \frac{e^{-(\gamma+i\omega_0)t}}{\gamma}\,dt,$$

откуда

$$B(\gamma)=\frac{1-e^{-(\gamma+i\omega_0)t}}{\gamma(\gamma+i\omega_0)}. \tag{12}$$

4. Возьмем функцию

$$\hat{v}(M,\gamma)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G \frac{e^{-\gamma r/c}}{r_{M\overline{M}}} F(\overline{M})B(\gamma)\,d\tau_{\overline{M}}. \tag{13}$$

Покажем, что искомая функция $\overline{u}(M,t)$ может быть представлена в виде:

$$\overline{u}(M,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\hat{v}(M,\gamma)}{\gamma}e^{\gamma t}\,d\gamma, \tag{14}$$

а тем самым

$$\hat{v}(M,\gamma)=\overline{v}(M,\gamma).$$

В качестве пути интегрирования L в формуле (14) взята прямая $\gamma=\alpha_0+i\beta$, $\alpha_0=\text{const}>0$, параллельная мнимой оси.

При определении функций $\hat{v}(M,\gamma)$ мы взяли решение в форме $e^{-\gamma r}/r$, так как именно этой функции при помощи формулы (14) соответствует функция $\overline{u}(M,t)$, которая удовлетворяет нулевым условиям Коши, как это и будет показано ниже.

5. Убедимся в том, что функция $\overline{u}(M,t)$, определяемая формулой (14), удовлетворяет всем условиям задачи (9), (9′). Для этого, прежде всего, изменим порядок интегрирования и представим функцию $\overline{u}(M,t)$ в виде:

$$\overline{u}(M,t)=\frac{1}{2\pi i}\iiint\limits_G F(\overline{M})\,d\tau_{\overline{M}}\frac{1}{4\pi}\int\limits_L \frac{e^{\gamma(t-r/c)}}{r}\,\frac{1-e^{-(\gamma+i\omega_0)T}}{\gamma^2(\gamma+i\omega_0)}\,d\gamma. \tag{15}$$

Такое изменение порядка интеграции возможно, потому что вдоль пути L подинтегральная функция имеет равномерный порядок $1/|\gamma|^3$.

Докажем, что функция $\overline{u}(M,t)$ удовлетворяет начальным условиям. Так как подинтегральная функция в правой полуплоскости не имеет полюсов, то вычисление интеграла вдоль L можно произвести с помощью известной леммы Жордана [3]. В нашем случае лемма Жордана формулируется следующим образом. Интеграл

$$\int\limits_{C_R}\Phi(z)e^{-mz}\,dz\to 0\quad (m>0), \tag{16}$$

при условиях: контур C_R представляет собой часть полуокружности радиуса R, расположенную в области $\operatorname{Re}\gamma=\alpha>\alpha_0>0$ и имеющую центр в начале координат; функция $\Phi(z)$ равномерно стремится к нулю при $z\to\infty$ в области $\operatorname{Re}\gamma=\alpha>\alpha_0>0$.

Пользуясь этой леммой, непосредственно получаем:

$$\int\limits_L \frac{e^{-\gamma r/c}}{r}\,\frac{1-e^{-(\gamma+i\omega_0)T}}{\gamma^2(\gamma+i\omega_0)}\,d\gamma=0,$$

$$\int\limits_L \frac{e^{-\gamma r/c}}{r}\,\frac{1-e^{-(\gamma+i\omega_0)T}}{\gamma(\gamma+i\omega_0)}\,d\gamma=0.$$

Отсюда следует, что функции $\bar{u}(M, t)$ и $\partial\bar{u}(M, t)/\partial t$ непрерывны при $t = 0$ и начальные условия Коши (9') удовлетворены. При этом возможность дифференцирования под знаком интеграла при вычислении $\partial\bar{u}/\partial t$ не вызывает сомнения, так как интеграл, полученный после дифференцирования под знаком интеграла, сходится равномерно.

Вернемся теперь к функции

$$u_1(M, t) = \frac{\partial^2\bar{u}(M, t)}{\partial t^2}.$$

Пользуясь интегральным представлением (15) для функции $\bar{u}(M, t)$, найдем:

$$u_1(M, t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G F(\overline{M})\, d\tau_{\overline{M}}\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma(t - r/c)}}{r}\cdot\frac{1 - e^{-(\gamma + i\omega_0)T}}{\gamma(\gamma + i\omega_0)}\, d\gamma.$$

Дальнейшее дифференцирование под знаком интеграла не проводится, так как получаемое в результате дифференцирования подинтегральное выражение не может быть равномерно оценено, и, тем самым, нет оснований для изменения порядка интегрирования.

6. Покажем, что существует предел;

$$\lim_{t\to\infty} u_1(M, t)\, e^{i\omega_0 t} = v(M),$$

где $v(M)$ — функция, выражаемая формулой (6).

Фиксируем некоторую точку наблюдения $M = M_0$ и рассмотрим контурный интеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma(t - r/c)}}{r}\cdot\frac{1 - e^{-(\gamma + i\omega_0)T}}{\gamma(\gamma + i\omega_0)}\, d\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma(t - r/c)}}{r}\cdot\frac{1}{\gamma(\gamma + i\omega_0)}\, d\gamma -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma(t - r/c)}}{r}\cdot\frac{e^{-(\gamma + i\omega_0)T}}{\gamma(\gamma + i\omega_0)}\, d\gamma = I_1 + I_2.$$

Интеграл

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{-\gamma(T - t + r/c)}}{\gamma(\gamma + i\omega_0)}\cdot\frac{e^{-i\omega_0 T}}{r}\, d\gamma = 0$$

для всех значений t, так как всегда справедливо неравенство

$$T - t + r/c > 0.$$

Интеграл

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma(t - r/c)}}{r}\cdot\frac{1}{\gamma(\gamma + i\omega_0)}\, d\gamma,$$

принимает различные значения для каждого из случаев: $t < r/c$ или $t > r/c$.

Нетрудно видеть, что

$$I_1 = 0 \quad \text{при} \quad t < r/c.$$

Для вычисления I_1 при $t > r/c$ замкнем прямую L другой C_R^-, расположенной в области $\operatorname{Re}\gamma = \alpha < \alpha_0 > 0$, т. е. в левой полуплоскости, и применим теорему вычетов. В результате найдем:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma(t - r/c)}}{r}\,\frac{d\gamma}{\gamma(\gamma + i\omega_0)} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{i\omega_0} - \frac{e^{-i\omega_0(t - r/c)}}{i\omega_0},$$

так как интеграл по дуге C_R^- при $R \to \infty$ стремится к нулю.

Возвращаясь снова к функции $u(M, t)$ и учитывая полученный выше результат, будем иметь:

$$u(M_0, t)\,e^{i\omega_0 t} = u_1(M, t)\,e^{i\omega_0 t} =$$

$$= -\,e^{i\omega_0 t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{e^{-i\omega_0 t}}{i\omega_0}\,\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G \frac{e^{i\omega_0 r/c}}{r}\,F(\overline{M})\,d\tau_{\overline{M}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G \frac{e^{ikr}}{r}\,F(\overline{M})\,d\tau_{\overline{M}} = v(M_0) \qquad \text{для } T \gg t > \frac{d}{c},$$

где $d = \max(M_0, \overline{M})$, причем $\overline{M} \subset C$.

Таким образом, существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(M, t)\,e^{i\omega_0 t} = v(M) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G \frac{e^{ikr}}{r_{M\overline{M}}}\,F(\overline{M})\,d\tau_{\overline{M}},$$

что и требовалось доказать.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 8 июля 1947 г.

Литература

[1] A. Sommerfeld. Jahresber. d. D. Math. Vereinigung, **21**, 309, 1912. — [2] В. Д. Купрадзе. Основные задачи математической теории дифракции, ОНТИ Л.—М., 1935. — [3] В. И. Смирнов. Курс высшей математики, ГТТИ, т. III, 429, 1939