

**К ТЕОРИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ РАДИОВОЛНОВОДОВ \***

А.Н. ТИХОНОВ, А.А. САМАРСКИЙ

**ВВЕДЕНИЕ**

Вопрос о возбуждении цилиндрических радиоволноводов изучался в работах Щелкунова [1], Мандельштама [2], Слэтера [3], Кисунько [4].

Щелкунов рассматривал задачу возбуждения круглого цилиндрического волновода элементом электрического или магнитного тока, параллельным оси.

Решение этой задачи сводится фактически к построению функции источника для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями  $u = 0$  (электрический ток) или  $\partial u / \partial \nu = 0$  (магнитный ток). Щелкунов для построения функции источника пользовался весьма специальным интегральным представлением фундаментального решения  $e^{ikr} / (4\pi r)$ , добавляя к нему регулярное слагаемое, которое в сумме с фундаментальным решением удовлетворяло бы требуемым краевым условиям и принципу излучения.

Мандельштам [2] также занимался теорией возбуждения круглых цилиндрических волноводов. Однако он искал решение, пользуясь обычным методом разделения переменных.

Слэтер в своей книге "Передача ультракоротких радиоволн", ссылаясь на неопубликованные результаты Синге и Щелкунова, приводит приближенное решение задачи возбуждения простейшей волны  $H_{10}$  электрическим диполем, параллельным одной из сторон перпендикулярного сечения прямоугольного волновода.

Щелкунов и Сэлтер применяют найденные решения к вычислению активной составляющей сопротивления излучения.

Вопросом о возбуждении волноводов объемными токами занимался Кисунько [4].

В настоящей работе мы излагаем решение задачи о возбуждении цилиндрических радиоволноводов произвольного сечения при помощи любых токов, расположенных внутри волновода.

\*Вестник МГУ, 1948, №7, с.39-60.

В §1 дана постановка проблемы возбуждения волноводов токами. Показано, что проблема сводится к построению функции источника Герца. В случае электрического или магнитного элемента тока, параллельного оси, эта функция является функцией источника для волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

с краевыми условиями вида

$$u = 0 \text{ или } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

Производится построение функций источника, выясняется характер их особенности и сходимость их определяющих рядов (§3).

В силу полноты системы волн ТЕ и ТМ, *всякое электромагнитное поле в волноводе представимо в виде их суммы* (§2). На основании этой теоремы задача о возбуждении произвольными токами сводится к нахождению двух скалярных функций Герца  $Z_e$  и  $Z_m$ , которые выражаются соответственно через электрическую и магнитную функцию источника  $\Pi_e$  и  $\Pi_m$ . Для функций  $\Pi_e$  и  $\Pi_m$  найдено представление в виде ряда по собственным функциям мембраны, имеющей форму перпендикулярного сечения (§4). Общие формулы для электромагнитных полей, возбуждаемых в волноводах токами, позволяют провести вычисления активной части сопротивления излучения для произвольных токов (§5). Отсюда, в частности, легко получаются результаты Щелкунова и Сэлтера (§6).

Изучение реактивной составляющей сопротивления излучения линейных токов показывает, что реактанц имеет конечную величину только для настроенного диполя (§7). В §8 даны формулы величины реактанца полуволнового диполя, параллельного оси цилиндрического радиоволновода произвольной формы. Затем производится сравнение полученных выше формул с результатами работы Левина [5], в которой проведено вычисление реактанца полуволнового диполя, расположенного вдоль оси круглого волновода. В конце §8 проводится вычисление реактанца для диполя, перпендикулярного оси прямоугольного волновода.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полый цилиндр  $\Sigma$ , неограниченно простирающийся в направлении оси  $z$ . Стенки цилиндра  $\Sigma$  будем считать идеально проводящими. Пусть форма перпендикулярного сечения  $S$  определяется кривой  $C$ .

Нас интересует возбуждение волновода  $\Sigma$  линейным током  $L$ , интенсивность которого характеризуется функцией

$$J = J_0 f(s) e^{-i\omega t} \quad (f(s) \leq 1),$$

где  $s$  – длина дуги вдоль линии  $L$ . Мы будем изучать установившийся процесс, считая, что все величины электромагнитного поля пропорциональны временному множителю  $e^{-i\omega t}$ . Этот множитель в дальнейшем опускается.

Задача состоит в нахождении электромагнитного поля, возбуждаемого током  $L$ . Условиями, определяющими это поле, являются:

I. Уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= -ik \vec{E}, & \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right) \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= ik \vec{H}, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

II. Условие возбуждения, которое мы берем в форме

$$\oint_{K_\epsilon} H_s ds = \frac{4\pi}{c} J \quad (3)$$

( $K_\epsilon$  – бесконечно малый контур, охватывающий ток), точнее, мы предполагаем, что вблизи линии тока магнитное поле имеет особенность вида

$$H_s \approx \frac{2J}{c\rho} \quad (3')$$

( $\rho = \overline{MM_0}$ ,  $M$  – точка на  $K_\epsilon$ ,  $M_0$  – точка на  $L$ );

III. Граничное условие в виде требования равенства нулю на  $\Sigma$  тангенциальной составляющей электрического поля:

$$E_t = 0 \text{ на } \Sigma; \quad (4)$$

IV. Условие излучения в виде требования отсутствия волн, приходящих из бесконечности.

## 2. ПОЛНОТА СИСТЕМЫ ВОЛН ТЕ И ТМ<sup>1</sup>

Рассмотрим внутри волновода некоторое электромагнитное поле, регулярное всюду в области  $z > 0$ . Покажем, что это поле можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} \\ \vec{H} &= \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)},\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\{\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}\}$  – поле типа ТЕ,  $\{\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}\}$  – поле типа ТМ, то есть  $E_z^{(1)} = 0$  и  $H_z^{(2)} = 0$ .

Если  $\vec{Z}_e$  и  $\vec{Z}_m$  – электрический и магнитный векторы Герца, то (5) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{-ik} \left( \text{grad div } \vec{Z}_e + k^2 \vec{Z}_e \right) + \text{rot } \vec{Z}_m \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{Z}_e + \frac{1}{ik} \left( \text{grad div } \vec{Z}_m + k^2 \vec{Z}_m \right),\end{aligned}\quad (6)$$

причем у векторов  $\vec{Z}_e$  и  $\vec{Z}_m$  отлична от нуля только  $z$ -компонента.

Компоненты  $E_z$  и  $H_z$  удовлетворяют волновому уравнению (1), крайевым условиям

$$E_z = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Sigma \quad (7)$$

и принципу излучения IV.

Для определения скалярных функций  $Z_e$  и  $Z_m$  достаточно использовать не все компоненты электромагнитного поля, а лишь  $E_z$  и  $H_z$ , которые тем самым, в силу (6), определяют все остальные компоненты.

Функции Герца  $Z_e$  и  $Z_m$  должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 Z_e}{\partial z^2} + k^2 Z_e = -ikE_z, \quad \frac{\partial^2 Z_m}{\partial z^2} + k^2 Z_m = ikH_z \quad (8)$$

и

$$\Delta Z_e + k^2 Z_e = 0, \quad \Delta Z_m + k^2 Z_m = 0. \quad (9)$$

Мы будем определять  $Z_e$  и  $Z_m$  из уравнений

$$\begin{aligned}\Delta_2 Z_e &= ikE_z(M, z) \\ \Delta_2 Z_m &= -ikH_z(M, z)\end{aligned}\quad (10)$$

<sup>1</sup>Подробнее см. [6].

( $\Delta_2$  – двумерный оператор Лапласа в области  $S$ ), которые следуют из (9) и (10).

Кроме того, функции  $Z_e$  и  $Z_m$  удовлетворяют граничным условиям

$$Z_e = 0, \quad \frac{\partial Z_m}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } C. \quad (11)$$

Решение уравнений Пуассона (11) можно представить с помощью соответствующих функций Грина

$$\begin{aligned} Z_e(M, z) &= -ik \iint_{(S)} G_2(M, \bar{M}) E_z(\bar{M}, z) d\sigma_{\bar{M}} \\ Z_m(M, z) &= ik \iint_{(S)} \hat{G}_2(M, \bar{M}) H_z(\bar{M}, z) d\sigma_{\bar{M}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $G_2(M, \bar{M})$  – функция Грина мембраны  $S$ , закрепленной по контуру  $C$ ,  $\hat{G}_2(M, \bar{M})$  – функция Грина свободной мембраны  $S$ .

Такое определение является однозначным и возможно для тех областей  $S$ , для которых существует функция Грина.

Функции  $E_z$  и  $H_z$  имеют непрерывные производные по  $z$  в области  $z > 0$  (см. [6]). Поэтому непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что функции  $Z_e$  и  $Z_m$ , определяемые формулами (12), удовлетворяют волновым уравнениям (9) и, следовательно, уравнениям (8).

Итак, считая поле заданным всюду в области  $z > 0$  и беря только две компоненты  $E_z$  и  $H_z$ , мы нашли векторы Герца  $\vec{Z}_e$  и  $\vec{Z}_m$ , которым, согласно [6], соответствует векторное поле  $\{\hat{E}, \hat{H}\}$ . Нужно доказать, что оно тождественно совпадает с полем заданным.

Не имея возможности останавливаться на доказательстве подробно, укажем, что задача нахождения всех компонент электромагнитного поля по заданным  $E_z$  и  $H_z$  редуцируется к известной проблеме Гильберта: найти две сопряженные функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  внутри области  $S$ , определяемые условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{внутри } S \\ \alpha u + \beta v = F(s) \quad \text{на } C, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $F(s)$  – некоторая заданная на контуре  $C$  функция дуги  $s$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – направляющие косинусы касательной к  $C$  в точке  $s$ .

Проблема Гильберта, как известно, имеет единственное решение.

### 3. ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА<sup>2</sup>

Пусть  $L$  – прямолинейный ток, параллельный оси  $z$ . В этом случае

$$Z_m = 0, \quad Z_e = Z.$$

Функцию Герца  $Z$  будем искать в виде:

$$Z = K \int_L \Pi(M, M_0; z, \zeta) J(\zeta) d\zeta, \quad (14)$$

где  $K$  – константа, определяемая из условия возбуждения  $\Pi$ .

При этом в качестве функции  $\Pi$  мы берем функцию источника, определяемую как решение волнового уравнения (1) по переменным  $(M, z)$  и  $(M_0, \zeta)$ , удовлетворяющее краевому условию  $\Pi = 0$  на  $\Sigma$ , принципу излучения IV и имеющее особенность типа  $e^{ikr}/(4\pi r)$  при совпадении аргументов. Она представима в виде суммы

$$\begin{aligned} \Pi(M, M_0; z, \zeta) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \tilde{\Pi}(M, M_0, z, \zeta) \\ (r = \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}, \quad \rho = \overline{MM_0}), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\tilde{\Pi}(M, M_0, z, \zeta)$  – регулярная функция, определяемая из волнового уравнения и граничного условия

$$\tilde{\Pi}(M, M_0, z, \zeta) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{на } \Sigma.$$

Из формулы (14) следует, что вблизи тока

$$Z \approx \frac{JK}{4\pi} 2 \ln \frac{1}{\rho}. \quad (16)$$

<sup>2</sup>Подробнее см. [7].

С другой стороны, из формулы  $\vec{H} = \text{rot} \vec{Z}$  видно, что

$$H_s = \frac{\partial Z}{\partial \rho}. \quad (17)$$

Пользуясь (16), (17) и условием возбуждения (3'), получаем

$$K = \frac{4\pi}{c}.$$

Таким образом,

$$Z(M, z) = \frac{4\pi}{c} \int_L \Pi(M, M_0; z, \zeta) J(\zeta) d\zeta. \quad (17')$$

В частности, для элемента тока длины  $l$ :

$$Z = \frac{4\pi}{c} J l \cdot \Pi.$$

Следовательно,  $\Pi$  имеет физический смысл функции Герца, соответствующей возбуждению элементом тока, помещенным в точке  $(M_0, \zeta)$  параллельно оси волновода.

Таким образом, задача определения электромагнитного поля в волноводе полностью сведена к построению функции  $\Pi$ , удовлетворяющей указанным выше условиям.

Можно показать [7], что функция  $\Pi(M, M_0; z, \zeta)$  выражается рядом

$$\Pi(M, M_0; z - \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \psi_n(M_0)}{2p_n} e^{p_n |z - \zeta|}, \quad (18)$$

где  $\psi_n(M)$  – собственные функции мембраны  $S$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n &= 0 \text{ в } S \\ \psi_n &= 0 \text{ на } C \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}.$$

Так как собственные значения  $\lambda_n$  плоской мембраны  $S$  неограниченно возрастают с номером  $n$ , то существует лишь конечное число мнимых  $p_n$  (бегущие волны) и бесконечное число вещественных значений  $p_n$  (затухающие волны).

Для доказательства сходимости ряда, определяющего  $\Pi$ , требуется установить оценки собственных функций мембраны  $\psi_n$  и их производных до второго порядка включительно. Нами показано [7], что имеют место следующие неравенства:

$$|\psi_n(M)| < A\lambda_n, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right| < A_1 \lambda_n^2, \quad \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right| < A_1 \lambda_n^2 \\ \left| \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \right| < A_2 \lambda_n^3, \quad \left| \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right| < A_2 \lambda_n^3, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $A$ ,  $A_1$  и  $A_2$  – константы. Для собственных значений, как известно, справедливы асимптотическая формула

$$\lambda_n \approx \frac{4\pi}{S} n. \quad (22)$$

При помощи оценок (20) и (22) исследуются свойства ряда (18). Этого достаточно, чтобы доказать, что функция источника

$$\begin{aligned} \Pi(M, M_0; z - \zeta) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \tilde{\Pi}(M, M_0; z - \zeta) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M_0)}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|} \quad \text{для } z \neq \zeta. \end{aligned}$$

Из непрерывности функции источника при  $z \rightarrow \zeta$  ( $M \neq M_0$ ) вытекает поведение ряда (18) при  $z = \zeta$ , то есть, что

$$\Pi(M, M_0; 0) = \lim_{z-\zeta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M_0)}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|}.$$

Задача о возбуждении волновода элементом магнитного тока, параллельным оси  $z$  (бесконечно малая петля с электрическим током в плоскости  $S$ ), приводит нас ко второй функции источника:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(M, M_0; z - \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M)\hat{\psi}_n(M_0)}{2\hat{p}_n} e^{\hat{p}_n|z-\zeta|} = \\ &= \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} + \hat{\tilde{\Pi}}(M, M_0; z - \zeta), \end{aligned} \quad (23)$$



где  $\hat{\Pi}(M, M_0; z - \zeta)$  – регулярное всюду решение волнового уравнения,

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

на  $\Sigma$ ,  $\hat{p}_n = \sqrt{\hat{\lambda}_n - k^2}$ ,  $\hat{\psi}_n(M)$  и  $\hat{\lambda}_n$  – собственные функции и собственные значения мембраны  $S$ :

$$\Delta_2 \hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n \hat{\psi}_n = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial \nu} = 0 \text{ на } C.$$

При этом  $Z_e = 0$ ,  $Z_m = \frac{4\pi}{c} Kl \cdot \hat{\Pi}$  ( $Kl$  – момент элемента магнитного тока).

#### 4. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ТОКИ<sup>3</sup>

Вернемся теперь к случаю произвольного линейного тока. Очевидно, что функции Герца для общего случая могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} Z_e(M, z) &= \frac{4\pi}{c} \int_L \Pi_e(M, z; M_0(s), \zeta(s); \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)) J(s) ds \\ Z_m(M, z) &= \frac{4\pi}{c} \int_L \Pi_m(M, z; M_0(s), \zeta(s); \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)) J(s) ds, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $s$  – параметр, определяющий положение точки  $(M_0, \zeta)$  на дуге  $z$ ,  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$ ,  $\gamma(s)$  – направляющие косинусы касательной в точке  $s$ .

Функции  $\frac{4\pi}{c} \Pi_e J ds$  и  $\frac{4\pi}{c} \Pi_m J ds$  являются, очевидно, функциями Герца элементарного тока, помещенного в точку  $(M_0, \zeta)$  в направлении  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .

Таким образом, задача сводится к построению функции  $\Pi_e$  и  $\Pi_m$ . В дальнейшем последние аргументы  $\alpha, \beta, \gamma$  мы иногда будем опускать.

Для простоты рассмотрим сначала элемент тока, расположенный в точке  $[M_0(x_0, y_0), \zeta]$  перпендикулярно к оси волновода и вдоль оси  $y$ . В этом случае  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta = 1$ .

Будем искать поля в виде суммы:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{N}{-ik} \left( \text{grad div } \vec{\Pi}' + k^2 \vec{\Pi}' \right) + \vec{E}_1 \\ \vec{H} &= N \text{rot } \vec{\Pi}' + \vec{H}_1, \end{aligned} \quad (25)$$

<sup>3</sup>Подробнее см. [8].

где  $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$  – поле, не имеющее особенностей;  $\vec{\Pi}' = \Pi' \vec{t}_2$ ,  $\vec{t}_2$  – орт оси  $y$ ;  $\Pi'$  – любая функция, имеющая особенность  $e^{ikr}/(4\pi r)$  в точке  $[M_0(x_0, y_0), \zeta]$ ;  $N = \frac{4\pi}{c} J l$ ,  $J$  – сила тока;  $l$  – длина элемента тока.

Положим

$$\Pi' = \frac{e^{ikr}}{4\pi r},$$

тогда

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{N}{-ik} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) + E_{1z} = \frac{-N}{-ik} \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial z} + E_{1z} \\ H_z &= N \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) + H_{1z} = -N \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) + H_{1z}. \end{aligned} \quad (26)$$

Функции  $E_z$  и  $H_z$ , полностью определяющие поле  $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ , должны удовлетворять волновому уравнению, краевым условиям

$$E_z = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

условию излучения и иметь особенности согласно (26).

Поэтому можно написать

$$E_z = -\frac{N}{-ik} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_0 \partial x}, \quad H_z = -N \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial x_0}, \quad (26')$$

где  $\Pi$  и  $\hat{\Pi}$  даются формулами (18) и (23).

В самом деле,

$$\begin{aligned} \Pi(M, M_0; z - \zeta) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \tilde{\Pi}(M, M_0; z - \zeta), \\ \hat{\Pi}(M, M_0; z - \zeta) &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \hat{\tilde{\Pi}}(M, M_0; z - \zeta), \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Pi}$  и  $\hat{\tilde{\Pi}}$  – регулярные всюду решения волнового уравнения; функции  $e^{ikr}/(4\pi r)$  зависят только от разности координат точек  $[M(x, y), z]$  и  $[M_0(x_0, y_0), z]$ , поэтому правые части формул (26) обладают нужными особенностями. Кроме того, так как  $\partial \Pi / \partial z = 0$  и  $\partial \hat{\Pi} / \partial z = 0$  на  $\Sigma$  по аргументам  $(M, z)$  при любом положении точки  $(M_0, z)$ , то отсюда следует, что дифференцирование по параметрам  $x_0, y_0$  не меняет краевых условий.

С другой стороны, из общих формул (6) имеем:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{N}{-ik} \left( \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} + k^2 \Pi_e \right) \\ H_z &= \frac{N}{ik} \left( \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} + k^2 \Pi_m \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Сравнение (22) и (20) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} + k^2 \Pi_e &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_0 \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} + k^2 \Pi_m &= -ik \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Пользуясь выражением для  $\Pi$  и  $\hat{\Pi}$ , находим:

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial y_0}}{2\lambda_n} e^{-p_n |z-\zeta|} \left( \begin{array}{l} + \text{ при } z > \zeta, \\ - \text{ при } z < \zeta \end{array} \right), \\ \Pi_m &= -ik \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M) \frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0}}{2\hat{p}_n \hat{\lambda}_n} e^{-\hat{p}_n |z-\zeta|}. \end{aligned} \quad (28)$$

Функции  $\Pi_e$  и  $\Pi_m$  имеют в источнике особенность более сложного характера<sup>4</sup>, чем функции  $\Pi$  и  $\hat{\Pi}$ , и могут быть представлены в виде суммы

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \pm \frac{y - y_0}{4\pi\rho^2} \left[ e^{ikr} \frac{|z - \zeta|}{r} - e^{ik|z-\zeta|} \right] + \pi_e \left( \begin{array}{l} + \text{ при } z > \zeta, \\ - \text{ при } z < \zeta \end{array} \right), \\ \Pi_m &= ik \frac{x - x_0}{4\pi\rho^2} \left[ e^{ikr} - e^{ik|z-\zeta|} \right] + \pi_m, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\pi_e$  и  $\pi_m$  – регулярные решения волнового уравнения.

Нетрудно убедиться в том, что электромагнитное поле, определяемое по формулам (6) с помощью построенных нами функций  $\Pi_e$  и  $\Pi_m$ , действительно удовлетворяет условиям задачи.

Применяя принцип суперпозиции, сразу же получим из (6) решение для конечного тока  $L$ , направленного вдоль оси  $y$ . При этом функции Герца выражаются интегралами вдоль тока:

$$\begin{aligned} Z_e(M, z) &= \frac{4\pi}{c} \int_L \Pi_e(M, M_0(s); z) J(s) ds, \\ Z_m(M, z) &= \frac{4\pi}{c} \int_L \Pi_m(M, M_0(s); z) J(s) ds. \end{aligned} \quad (30)$$

<sup>4</sup>Для его выяснения достаточно рассмотреть элемент тока в неограниченном пространстве.

Рассмотрим теперь элемент тока  $L$ , помещенный в точку  $(M_0, \zeta)$  и имеющий произвольное направление, характеризуемое единичным вектором  $\vec{s}^0(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Электромагнитное поле  $\{\vec{E}, \vec{H}\}$  по-прежнему представляем в виде (19), причем

$$\vec{\Pi}' = \Pi' \alpha \vec{i}_1 + \Pi' \beta \vec{i}_2 + \Pi' \gamma \vec{i}_3,$$

где  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  – орты координатных осей.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше для частного случая, приводят к формулам:

$$\begin{aligned} \Pi_e(M, z; M_0, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \Psi_n(M_0)}{2p_n \lambda_n} e^{-p_n |z - \zeta|}, \\ \Pi_n(M, z; M_0, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M) \hat{\Psi}_n(M_0)}{2\hat{p}_n \hat{\lambda}_n} e^{-\hat{p}_n |z - \zeta|}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_n(M_0) &= \pm p_n \left( \alpha \frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial y_0} \right) + \gamma \lambda_n \psi_n(M), \\ & \quad (+ \text{ при } z > \zeta, - \text{ при } z < \zeta), \\ \hat{\Psi}_n(M_0) &= ik \left( \alpha \frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial y_0} - \beta \frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что согласно (32), функция  $\Pi_n$  не зависит от  $\gamma$ .

Соответствующие функции Герца определяются согласно (24). Нетрудно перейти к случаю поверхностных и объемных токов. Функции Герца при этом даются соответствующими поверхностными или объемными интегралами [по аналогии с (30)]. Дальнейшее вычисление полей производится по формулам (6).

Тем самым задача о возбуждении любого цилиндрического волновода произвольными токами решена полностью.

## 5. СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ (АКТИВНАЯ ЧАСТЬ)

Развитая выше теория возбуждения волноводов заданными токами может быть применена для расчета сопротивления излучения возбуждающих токов.

Сопротивление излучения проводника с током  $J = J_0 f(s)$  ( $f(s) \leq 1$ ) определяется как отношение

$$R = \frac{W_r}{J_0^2} = R^{(a)} - iR^{(r)},$$

где  $W_r$  – мощность излучения, представляющая собой предел, к которому стремится поток комплексного вектора Пойнтинга  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}^*]$  ( $\vec{H}^*$  – комплексно сопряженный вектор для  $\vec{H}$ ) через поверхность  $\Omega$ , охватывающую проводник  $L$ , при стягивании  $\Omega$  к поверхности проводника;  $R^{(a)}$  и  $R^{(r)}$  – активная и реактивная составляющие.

Комплексная теорема Пойнтинга [1, 10] дает:

$$R^{(a)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{J_0^2} \iint_{S_z + S_{-z}} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}^*] d\vec{\sigma}, \quad (33)$$

$$R^{(r)} = \frac{2\omega}{J_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \iint_{S_z + S_{-z}} \frac{\vec{H}\vec{H}^* - \vec{E}\vec{E}^*}{8\pi} d\sigma. \quad (34)$$

где  $S_z$  – перпендикулярное сечение волновода на расстоянии  $z$  от начала координат. При вычислении  $R$  можно пользоваться также формулой [10]:

$$R = -\frac{1}{J_0^2} \int_L E_s(s) J^*(s) ds \quad (35)$$

(метод наведенных эдс).

Перейдем к вычислению активной части сопротивления излучения произвольного тока  $L$ . Воспользуемся формулой (23) и выражениями для  $\{\vec{E}, \vec{H}\}$  из (6):

$$R^{(a)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{c}{4\pi J_0^2} \frac{2}{ik} \iint_S \left\{ \left[ \frac{\partial^2 Z_e}{\partial x \partial z} \frac{\partial Z_e^*}{\partial x} - \frac{\partial^2 Z_e}{\partial y \partial z} \frac{\partial Z_e^*}{\partial y} \right] - \left[ \frac{\partial^2 Z_m^*}{\partial x \partial z} \frac{\partial Z_m}{\partial x} - \frac{\partial^2 Z_m^*}{\partial y \partial z} \frac{\partial Z_m}{\partial y} \right] \right\} d\sigma. \quad (36)$$

При этом

$$\begin{aligned} Z_e &= \frac{4\pi}{c} J_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \Phi_n(z)}{2\lambda_n \rho_n}, \\ Z_m &= \frac{4\pi}{c} J_0 i k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M) \hat{\Phi}_n(z)}{2\hat{\lambda}_n \hat{\rho}_n}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(z) &= \int_L \Psi_n(M_0(s)) e^{-p_n |z - \zeta(s)|} ds, \\ \hat{\Phi}_n(z) &= \int_L \hat{\Psi}_n(M_0(s)) e^{-\hat{p}_n |z - \zeta(s)|} ds, \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя выражения для  $Z_e$  и  $Z_m$  в (36), получим после ряда преобразований [10]:

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{ck} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n(0) \Phi_n^*(0)}{2\kappa_n \lambda_n} + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{k^2 \hat{\Phi}_n(0) \hat{\Phi}_n^*(0)}{2\hat{\kappa}_n \hat{\lambda}_n} \right\}, \quad (39)$$

где  $\kappa_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}$ ,  $\hat{\kappa}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}$ , а числа  $N$  и  $N_1$  определяются неравенствами  $\lambda_N < k^2 < \lambda_{N+1}$ ,  $\hat{\lambda}_{N_1} < k^2 < \lambda_{N_1+1}$ .

Отсюда для элемента тока длины  $l$  имеем:

$$R^{(a)} = \frac{4\pi l^2}{c k} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{\Psi_n(M_0) \Psi_n^*(M_0)}{2\kappa_n \lambda_n} + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\hat{\Psi}_n(M_0) \hat{\Psi}_n^*(M_0)}{2\hat{\kappa}_n \hat{\lambda}_n} \right\}. \quad (40)$$

Из (39) легко найти сопротивление излучения прямолинейного тока, параллельного оси волновода:

$$\begin{aligned} R^{(a)} &= \frac{4\pi}{ck} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n \psi_n^2(M_0)}{2\kappa_n} \times \\ &\left\{ \left[ \int_L f(\zeta) \cos \kappa_n \zeta d\zeta \right]^2 + \left[ \int_L f(\zeta) \sin \kappa_n \zeta d\zeta \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

В частности, для элементарного тока, параллельного оси  $z$ , имеем:

$$R^{(a)} = \frac{4\pi l^2}{c k} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n \psi_n^2(M_0)}{2\kappa_n}. \quad (42)$$

Вычисление реактанца может быть проведено по формуле (34). Однако, при этом возникает вопрос о конечности реактанца, что связано со сходимостью его определяющего объемного интеграла. В дальнейшем мы вернемся к изучению этого вопроса.

Формулы, определяющие сопротивление излучения  $R^{(a)}$  и показывающие его конечность во всех случаях, выражают устойчивость этой физической величины. Отсюда следует, что активную часть можно вычислять независимо от того, конечен или бесконечен реактанц.

Те же результаты могут быть получены и методом наведенных эдс, если исходить из формулы

$$R^{(a)} = -\frac{1}{J_0} \int_L \operatorname{Re}\{E_s(s)J^*(s)\} ds$$

где значения тангенциальной компоненты электрического поля берутся на проводнике.

## 6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ. ФОРМУЛЫ ЩЕЛКУНОВА И СЛЭТЕРА

Общие формулы сопротивления излучения (40) дают возможность легко получить результаты Щелкунова и Слэтера. Для удобства сравнения перейдем в наших формулах к практической системе единиц Георги, в которой основные соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{-i\omega\epsilon} \left( \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z}_e + k^2 \vec{Z}_e \right) + \operatorname{rot} \vec{Z}_m \\ \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{Z}_e + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z}_m + k^2 \vec{Z}_m \right) \quad (k^2 = \omega^2 \epsilon \mu) \end{aligned} \quad (6')$$

$$\begin{aligned} Z_e &= \int_L \Pi_e J(s) ds, \quad Z_m = \int_L \Pi_m J(s) ds \\ \Pi_e &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \Psi_n(M_0)}{2p_n \lambda_n} e^{-p_n |z-\zeta|} \\ \Pi_m &= i\omega\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M) \hat{\Psi}_n(M_0)}{2\hat{p}_n \hat{\lambda}_n} e^{-\hat{p}_n |z-\zeta|}. \end{aligned} \quad (43)$$

Рассмотрим элемент электрического тока произвольной ориентации. В этом случае вычисления с помощью комплексной

теоремы Пойнтинга приводят нас к следующему выражению:

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{\omega \epsilon} \sum_{n=1}^N \frac{\Psi_n(M_0) \Psi_n^*(M_0)}{2\chi_n \lambda_n} + \omega \mu l^2 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\hat{\Psi}_n(M_0) \hat{\Psi}_n^*(M_0)}{2\hat{\chi}_n \hat{\lambda}_n}. \quad (40')$$

В указанной выше работе Щелкунов рассматривал элемент тока, параллельный оси круглого цилиндрического волновода.

В этом случае:

$$\hat{\Psi}_n(M_0) = 0, \quad \Psi_n(M_0) = \lambda_n \psi_n(M_0)$$

и мы получаем

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{\omega \epsilon} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n \psi_n^2(M_0)}{2\chi_n}. \quad (42')$$

Ортогональные и нормированные собственные функции круглой мембраны имеют вид:

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi a^2} \frac{J_n(\mu_{mn} \frac{r}{a})}{J_n'(\mu_{mn})}} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\varphi, \quad (44)$$

причем  $\epsilon_n = 2$ , если  $n \neq 0$ , и  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\mu_{mn}$  – корень уравнения  $J_n(\mu) = 0$ ,  $a$  – радиус перпендикулярного сечения волновода.

Подставляя в (42') выражение (44) для собственной функции, сразу же получаем формулу Щелкунова:

$$R^{(a)} = \left(\frac{l}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{N_1} \frac{\epsilon_n}{2\pi} \left[ \frac{J_n(\mu_{mn} \frac{b}{a})}{J_n'(\mu_{mn})} \right]^2 \frac{\nu_{mn}^2}{\sqrt{1 - \nu_{mn}^2}}, \quad (45)$$

где  $\nu_{mn}^2 = \frac{\lambda_{mn}}{k^2}$ ,  $\mu_{mn}^2 = \lambda_{mn} a^2$ ,  $b$  – расстояние элемента тока от оси  $z$ .

Нетрудно получить аналогичным способом и формулу для сопротивления излучения элемента магнитного тока, параллельного оси  $z$ . Как указывалось в §3, задача о возбуждении волновода магнитным током, параллельным оси волновода, решается с помощью второй функции источника

$$\hat{\Pi}(M, M_0; z - \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M) \hat{\psi}_n(M_0)}{2\hat{p}_n} e^{-\hat{p}_n |z - \zeta|}.$$

Формулы (6') в этом случае остаются в силе, однако следует положить:

$$Z_e = 0, \quad Z_m = -i\omega \mu S_0 J \hat{\Pi},$$



где  $S_0$  – площадь петли с током, эквивалентной элементу магнитного тока,  $J$  – сила электрического тока, текущего по петле.

Для  $R^{(a)}$  имеем:

$$R^{(a)} = \omega \mu S_0^2 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\hat{\lambda}_n \hat{\psi}_n^2(M_0)}{2\hat{\chi}_n}. \quad (42'')$$

Подставляя сюда выражения для ортонормированных собственных функций  $\hat{\psi}_n(M)$  круглой мембраны  $S$ :

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi a^2}} \frac{\hat{\mu}_{mn}}{\sqrt{\hat{\mu}_{mn}^2 - n^2}} \frac{J_n(\hat{\mu}_{mn} \frac{r}{a})}{J_n(\mu_{mn})} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\varphi, \quad (44')$$

( $\mu_{mn}$  – корень уравнения  $J'_n(\mu) = 0$ ;  $\hat{\mu}_{mn}^2 = \hat{\lambda}_{mn} a^2$ ), приходим ко второй формуле Щелкунова:

$$R^{(a)} = \left(\frac{S_0}{a^2}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=1}^{N'_1} \frac{\epsilon_n \hat{\mu}_{mn}}{2\pi \hat{\mu}_{mn}^2 - n^2} \left[ \frac{J_n(\hat{\mu}_{mn} \frac{b}{a})}{J_n(\mu_{mn})} \right]^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \hat{\nu}_{mn}^2}} \left( \hat{\nu}_{mn}^2 = \frac{\hat{\lambda}_{mn}}{k^2} < 1 \right). \quad (45')$$

Рассмотрим теперь прямоугольный волновод. Направим оси  $x$  и  $y$  параллельно сторонам  $a$  и  $b$  перпендикулярного сечения: в одной из его вершин поместим начало координат. Пусть в точке  $(d, y_0)$  находится элемент тока, параллельный оси  $y$ .

Соппротивление излучения элемента тока, направленного вдоль оси  $y$

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{\omega \epsilon} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_n}{2\lambda_n} \left[ \frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial y_0} \right]^2 + \omega \mu l^2 \sum_{n=0}^{N_1} \frac{1}{2\hat{\chi}_n \hat{\lambda}_n} \left[ \frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0} \right]^2.$$

В нашем случае собственные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_n(M) &= \psi_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \\ \hat{\psi}_n(M) &= \hat{\psi}_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y, \quad (\epsilon_j = 2, j \neq 0, \epsilon_0 = 1). \end{aligned}$$

Если в волноводе распространяется только одна волна  $H_{10}$  ( $m = 1, n = 0$ ), то мы получим формулу Слэтера [2, 10]:

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{ab} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ak}\right)^2}}. \quad (46)$$

## 7. О РЕАКТАНЦЕ ЛИНЕЙНЫХ ТОКОВ

В настоящем параграфе мы докажем, что только для настроенного диполя<sup>5</sup> величина реактанца конечна.

Мы установим сначала справедливость этого утверждения для неограниченного пространства. Отсюда же будет следовать справедливость его для любых объемов (для волноводов и эндовибраторов).

Пусть в неограниченном пространстве находится прямолинейный проводник  $L$  длины  $2l$ , на котором задано распределение тока

$$J = J_0 f(z), \quad -l \leq z \leq l, \quad |f(z)| \leq 1.$$

Предположим, что функция распределения  $f(z)$  не имеет особенностей внутри проводника (непрерывно дифференцируема дважды).

Электромагнитное поле, возбуждаемое током  $L$ , определяется из: 1) уравнений Максвелла, 2) условий возбуждения в форме (2) или (2'), 3) условий излучения на бесконечности, имеющих для неограниченного пространства форму известных условий Зоммерфельда.

Вводя вектор Герца  $\vec{Z}$ , у которого отлична от нуля лишь аксиальная компонента, напомним:

$$\vec{E} = \frac{1}{-ik} \left( \text{grad div } \vec{Z} + k^2 \vec{Z} \right), \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{Z}. \quad (6'')$$

Функцию Герца представим в виде

$$Z(M, z) = \frac{4\pi}{c} J_0 \int_L \Pi(M, M_0; z - \zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad (14')$$

<sup>5</sup>Под настроенным диполем мы, как обычно, понимаем линейный проводник длины  $2l = n\lambda/2$  ( $n$  — целое число,  $\lambda$  — длина волны;  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ), на котором задано распределение тока  $J = J_0 f(s)$ ,

$$f(s) = \begin{cases} \cos ks, & \text{если } n - \text{нечетно,} \\ \sin ks, & \text{если } n - \text{четно.} \end{cases}$$

где  $\Pi(M, M_0; z - \zeta)$  – функция источника волнового уравнения  $\Delta u + k^2 u = 0$ , имеющая для неограниченного пространства следующий простой вид:

$$\Pi(M, M_0; z - \zeta) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r},$$

где

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}, \quad \rho = \overline{MM_0}.$$

Вычислим сопротивление излучения вибратора, пользуясь основной в методе наведенных эдс формулой:

$$R = -\frac{1}{J_0} \int_L E_z(M_0, M_0; z) f(z) dz.$$

Найдем:

$$E_z(M, M_0; z) = \frac{1}{-ik} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 Z \right) =$$

$$\frac{4\pi}{c} \frac{J_0}{-ik} \int_{-l}^l \left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi(M, M_0; z - \zeta) \right] f(\zeta) d\zeta.$$

Пользуясь тем, что  $\partial^2 \Pi / \partial z^2 = \partial^2 \Pi / \partial \zeta^2$ , и интегрируя в дальнейшем по частям, получим:

$$E_z(M, M_0; z) = \frac{4\pi}{c} \frac{J_0}{-ik} \int_{-l}^l \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \zeta^2} + k^2 \Pi \right) f(\zeta) d\zeta =$$

$$\frac{4\pi}{c} \frac{J_0}{-ik} \left\{ \Pi(M, M_0; l + z) f'(-l) - \Pi(M, M_0; l - z) f'(l) + \right.$$

$$\left. \int_{-l}^l \Pi(M, M_0; z - \zeta) [f''(\zeta) + k^2 f(\zeta)] d\zeta \right\}. \quad (47)$$

Если  $L$  – настроенный диполь, то

$$F(\zeta) = f''(\zeta) + k^2 f(\zeta) = 0,$$

причем  $f(\pm l) = 0$ . В этом случае интеграл в предыдущей формуле обращается в нуль.

Таким образом, для настроенного диполя тангенциальная компонента электрического поля

$$E_z(M, M_0; z) = \frac{4\pi}{c} \frac{J_0}{-ik} \left\{ \Pi(M, M_0; l + z) f'(-l) - \Pi(M, M_0; l - z) f'(l) \right\} \quad (48)$$

и имеет особенность только на концах проводника, так что произведение

$$E_z(M, M_0; z)f(z)$$

не имеет никаких особенностей для  $M \rightarrow M_0$ .

Так как

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos kr}{r} + i \frac{1}{4\pi} \frac{\sin kr}{r},$$

то из формулы (48) следует, что мнимая часть  $E_z$  на проводнике обращается в бесконечность во всех тех точках, в которых  $F(z) \neq 0$ , то есть для любого ненастроенного диполя.

Обратимся теперь к рассмотрению сопротивления излучения:

$$R = -\frac{1}{J_0} \int_{-l}^l E_z(M_0, M_0; z)f(z) dz.$$

Как показывает формула (48), для настроенного диполя  $E_z$  непрерывна во всех внутренних точках линии тока, а в концевых точках имеет особенность порядка  $\frac{1}{r}$ , так что произведение  $E_z \cdot f$  нигде не обращается в бесконечность. Отсюда следует, что сопротивление излучения настроенного диполя конечно.

С другой стороны, если  $F(z) = f''(z) + k^2 f(z)$  отлична от нуля, хотя бы в одной внутренней точке линии тока, то она отлична от нуля и на некотором участке  $(z - \varepsilon, z + \varepsilon)$ . Во всех точках этого участка  $J_m E_z$  обращается в бесконечность, а, следовательно, реактивная часть сопротивления излучения этого участка также равна бесконечности. Таким образом, доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1.** *Только для настроенного диполя мнимая часть тангенциальной составляющей электрического поля во всех внутренних точках остается конечной.*

**Теорема 2.** *Только для настроенного диполя реактивная составляющая сопротивления излучения любого его участка остается конечной.*

В этом случае

$$R = -\frac{4\pi i}{c k} \left\{ f'(-l) \int_{-l}^l \Pi(M_0, M_0; l+z)f(z) dz - f'(l) \int_{-l}^l \Pi(M_0, M_0; l-z)f(z) dz \right\}. \quad (49)$$

Характер особенностей электромагнитного поля на токе, связанный с условием возбуждения, остается одним и тем же, независимо от вида рассматриваемой области  $G$ . Отсюда следует справедливость теорем 1 и 2 для любой области  $G$  как ограниченной, так и неограниченной.

В случае волновода в этом можно убедиться и путем непосредственного изучения электромагнитного поля, возбуждаемого линейным током. Итак, пусть проводник  $L$  длины  $2l$ , вдоль которого задано распределение тока

$$J = J_0 f(s_0) \quad (f(s_0) \leq 1, \quad -l \leq s_0 \leq l, \quad f(\pm l) = 0)$$

помещен в волновод  $\Sigma$ . Направление проводника  $L$  будет характеризоваться единичным вектором  $\vec{s}^0(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Электромагнитное поле, возбуждаемое током  $L$ , можно представить в виде (см. §4):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{-ik} \left( \text{grad div } \vec{Z}_1 + k^2 \vec{Z}_1 \right) + \vec{E}_0 \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{Z}_1 + \vec{H}_0, \end{aligned} \quad (50)$$

где  $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$  – всюду регулярное поле,  $\vec{Z}_1 = Z_1 \cdot \vec{s}^0$ , причем

$$Z_1(M, z) = \frac{4\pi}{c} \int_{-l}^l \Pi_1(M, M_0(s_0); z - \zeta(s_0)) f(s_0) ds_0.$$

Здесь  $\Pi_1$  – любая функция источника, имеющая при  $M = M_0$  и  $z = \zeta$  особенность типа  $e^{ikr}/(4\pi r)$ .

Для входного сопротивления имеем:

$$R = -\frac{1}{J_0} \int_{-l}^l E_s(M(s_0), M_0(s_0); z(s_0)) f(s_0) ds_0.$$

При этом

$$E_s = -\frac{1}{-ik} \left( \frac{\partial^2 Z_1}{\partial s^2} + k^2 Z_1 \right) + E_{0s}.$$

Пользуясь выражением для  $Z_1$  и учитывая, что

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial s_0^2} + \chi(M, M_0; z, \zeta),$$

где  $\chi$  – регулярная всюду функция, получаем:

$$E_s = \frac{4\pi J_0}{c - ik} \int_{-l}^l \left( \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial s_0^2} + k^2 \Pi_1 \right) f(s_0) ds_0 + \hat{E}_{0s}.$$

Двукратное интегрирование по частям дает:

$$E_s = \frac{4\pi J_0}{c - ik} \left\{ - [\Pi_1 f'(s_0)]_{-l}^l + \int_{-l}^l \Pi_1(s_0) [f''(s_0) + k^2 f(s_0)] ds_0 \right\} + \hat{E}_{0s}.$$

Отсюда видно, что только для настроенного диполя, в силу условия  $f''(s_0) + k^2 f(s_0) = 0$ , тангенциальная компонента электрического поля  $E_s$  не имеет особенностей во внутренних точках проводника. Поэтому сопротивление излучения настроенного диполя, произвольным образом ориентированного внутри волновода, является конечной величиной. Справедливость теорем 1 и 2 тем самым установлена.

## 8. РЕАКТАНЦ ПОЛУВОЛНОВОГО ДИПОЛЯ

В настоящем параграфе мы рассмотрим, в качестве примеров приложения полученных выше результатов, две задачи о полуволновом диполе, ориентированном параллельно оси и перпендикулярно оси волновода.

Предварительно рассмотрим  $\frac{\lambda}{2}$  – диполь в неограниченном пространстве.

В этом случае, учитывая соотношения

$$f(z) = \cos kz, \quad f'(-l) = -f'(l) = k, \quad f(\pm l) = 0,$$

нетрудно получить из (4):

$$R = -\frac{8\pi}{c} i \int_{-l}^l \Pi(M_0, M_0; l+z) \cos kz dz. \quad (51)$$

Подставляя сюда функцию источника для неограниченного пространства

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r},$$

будем иметь:

$$R = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos u}{u} du - i \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

или

$$R = 30 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos u}{u} du - i \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{u} du \right\} \text{ ом},$$

то есть мы получим известную формулу сопротивления излучения полуволнового диполя в неограниченном пространстве.

1. Пусть полуволновой диполь параллелен оси цилиндрического волновода произвольной формы. Тогда формулы (6'), (14') и (51) по-прежнему остаются в силе, причем в качестве  $\Pi$  следует взять первую функцию источника (18). Подставляя в (51) выражение для  $\Pi$ , взятое из (18), получим:

$$R = -\frac{8\pi}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2(M_0)}{2p_n} \int_{-l}^l e^{-p_n(l+z)} \cos kz dz.$$

Возможность произведенного нами изменения порядка суммирования и интегрирования не вызывает сомнений.

Вычисления дают:

$$\int_{-l}^l e^{-p_n(l+z)} \cos kz dz = \frac{k}{\lambda_n} (1 + e^{-2p_n l})$$

и

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2(M_0)(1 + \cos \pi \sqrt{1 - \gamma_n^2})}{\lambda_n \sqrt{1 - \gamma_n^2}}, \quad (52)$$

$$R^{(r)} = -\frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2(M_0) \sin \pi \sqrt{1 - \gamma_n^2}}{\lambda_n \sqrt{1 - \gamma_n^2}} + \frac{4\pi}{c} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\psi_n^2(M_0)(1 + e^{-\pi \sqrt{\gamma_n^2 - 1}})}{\lambda_n \sqrt{\gamma_n^2 - 1}}, \quad (53)$$

где  $\gamma_n^2 = \lambda_n/k^2$ , а число  $N$  определяется условием  $\lambda_N < k^2 < \lambda_{N+1}$ .

Ряд, стоящий справа в (53), сходится, что может быть установлено специальным рассмотрением.

В случае волновода круглого сечения

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi a^2} \frac{J_n(\mu_{mn} \frac{r}{a})}{J'_n(\mu_{mn})}} \cos n\varphi$$

( $\epsilon_n = 2$  при  $n \neq 0$ ,  $\epsilon_0 = 1$ ),

где  $\mu_{mn}$  –  $m$ -й корень уравнения  $J_n(\mu) = 0$ ,  $a$  – радиус волновода.

Для  $\frac{\lambda}{2}$ -диполя, находящегося в точке  $M_0(r_0, \varphi_0 = 0)$ :

$$R^{(a)} = \frac{4}{c} \sum_{\substack{n=0 \\ (\lambda_{mn} < k^2)}} \sum_{m=1} \epsilon_n \left[ \frac{J_n(\mu_{mn} \frac{r_0}{a})}{J'_n(\mu_{mn})} \right]^2 \frac{1 + \cos \pi \sqrt{1 - \gamma_{mn}^2}}{\mu_{mn}^2 \sqrt{1 - \gamma_{mn}^2}}, \quad (54)$$

$$R^{(r)} = -\frac{4}{c} \sum_{\substack{n=0 \\ (\lambda_{mn} < k^2)}} \sum_{m=1} \epsilon_n \left[ \frac{J_n(\mu_{mn} \frac{r_0}{a})}{J'_n(\mu_{mn})} \right]^2 \frac{\sin \pi \sqrt{1 - \gamma_{mn}^2}}{\mu_{mn}^2 \sqrt{1 - \gamma_{mn}^2}} +$$

$$\frac{4}{c} \sum_{\substack{n \\ (\lambda_{mn} > k^2)}} \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon_n \left[ \frac{J_n(\mu_{mn} \frac{r_0}{a})}{J'_n(\mu_{mn})} \right]^2 \frac{1 + e^{-\pi \sqrt{\gamma_{mn}^2 - 1}}}{\mu_{mn}^2 \sqrt{\gamma_{mn}^2 - 1}}. \quad (55)$$

Отсюда сразу же получаются формулы для диполя, находящегося на оси круглой трубы<sup>6</sup> ( $r_0 = 0$ ):

$$R^{(a)} = \frac{4}{c} \sum_{m=1}^N \frac{1 + \cos \pi \sqrt{1 - \gamma_m^2}}{J_1^2(\mu_m) \mu_m^2 \sqrt{1 - \gamma_m^2}},$$

$$R^{(r)} = -\frac{4}{c} \sum_{m=1}^N \frac{\sin \pi \sqrt{1 - \gamma_m^2}}{J_1^2(\mu_m) \mu_m^2 \sqrt{1 - \gamma_m^2}} + \frac{4}{c} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1 + e^{-\pi \sqrt{\gamma_m^2 - 1}}}{J_1^2(\mu_m) \mu_m^2 \sqrt{\gamma_m^2 - 1}}. \quad (54')$$

Здесь  $\mu_m$  – корень номера  $m$  уравнения  $J_0(\mu) = 0$ .

Результаты расчетов входного сопротивления полуволнового диполя для случаев  $r_0 = 0$ ,  $r_0 = \frac{1}{4}a$ ,  $r_0 = \frac{1}{2}a$ ,  $r_0 = \frac{3}{4}a$  приведены на рис. 1 (при этом  $\omega_{10}/\omega = \gamma_{10}$ ). На рис. 2 отдельно показано входное сопротивление при  $r_0 = 0$  (диполь на оси).

<sup>6</sup>Подобная задача рассматривалась Левиным [5], однако при вычислении реактанца им была допущена несущественная ошибка в знаке, вследствие чего, однако, физическая интерпретация и графическая иллюстрация полученного результата оказались качественно неверными. Исправленные графики им даны в [12].



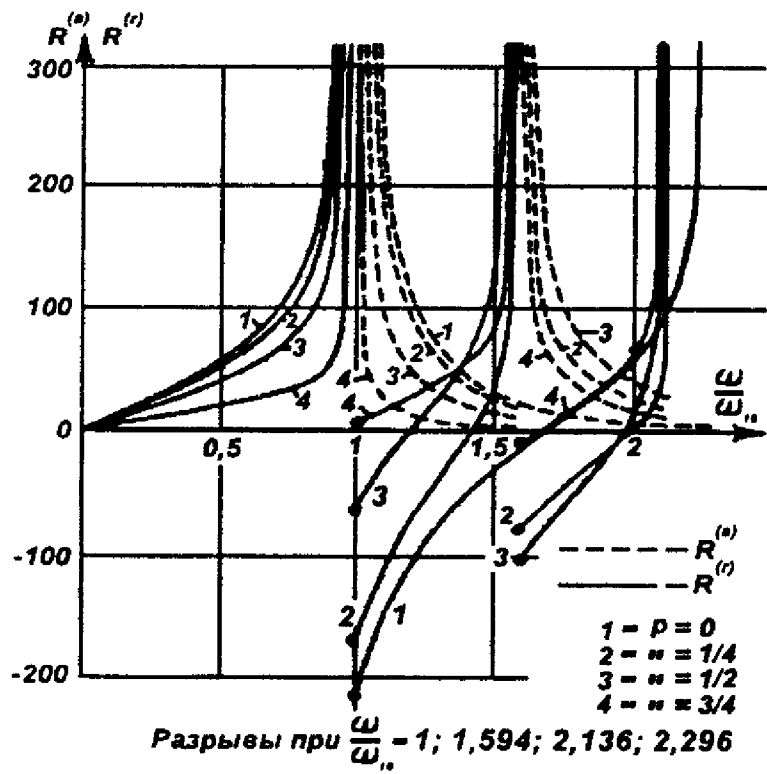


Рис. 1

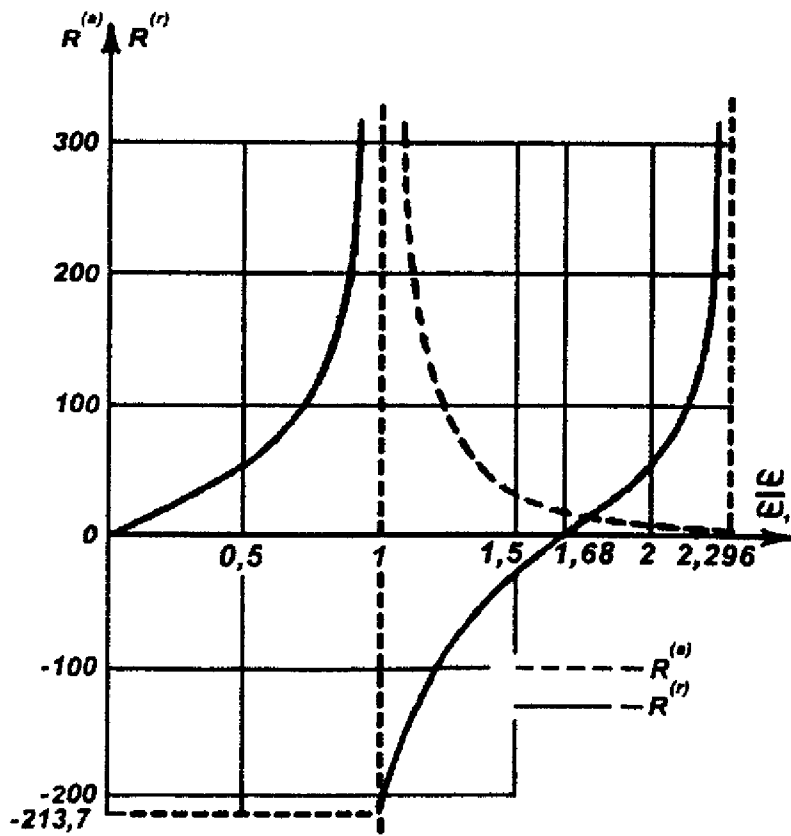


Рис. 2

Отметим, что при переходе через критические значения частот реактанс испытывает полубесконечный разрыв, принимая конечное предельное значение справа, равное  $-213,7$  ом при  $\omega/\omega_1 = 1$ .

2. Рассмотрим теперь прямоугольный волновод. Направим координатные оси  $x$  и  $y$  вдоль сторон  $a$  и  $b$  перпендикулярного сечения, в одну из вершин которого поместим начало координат. Пусть  $\frac{\lambda}{2}$ -диполь ориентирован вдоль оси  $y$ , а его концы находятся в точках  $M_1(d, y_1)$  и  $M_2(d, y_2)$ , причем  $y_2 - y_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{k}$ .

Функция распределения тока, очевидно, имеет вид:

$$f(y) = \sin k(y - y_1).$$

Сопротивление излучения будем вычислять методом наведенных эдс.

При этом тангенциальную составляющую электрического поля  $E_y$  возьмем не на самом токе  $L$ , а на параллельной ему линии  $L'$ , лежащей в плоскости  $z - \zeta = \delta > 0$ , затем найдем интеграл  $\int_{L'} E_y f d\eta$  и перейдем к пределу  $\delta \rightarrow 0$ . Таким образом, мы определим сопротивление излучения полуволнового диполя  $L$  как предел

$$R = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{J_0} \int_{Y_1}^{Y_2} E_y(d, \eta; \delta) f(\eta) d\eta \right\}. \quad (56)$$

Расчет электромагнитного поля, возбуждаемого диполем  $L$ , можно проводить как по общим формулам (6), так и по формулам (14'), вводя функцию источника [10, 11]:

$$\tilde{\Pi}(M, M_0; z - \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_n(M) \tilde{\psi}_n(M_0)}{2\tilde{\rho}_n} e^{-\tilde{\rho}_n |z - \zeta|}, \quad (57)$$

где  $\tilde{\psi}_n(M)$  – собственные функции прямоугольной мембраны:

$$\Delta_2 \tilde{\psi}_n(M) + \tilde{\lambda}_n \tilde{\psi}_n = 0 \text{ в } S; \quad \tilde{\psi}_n = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b.$$

Очевидно:

$$\tilde{\psi}_n(M) = \tilde{\psi}_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{2\epsilon_n}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y.$$

Мы воспользуемся для нахождения  $E_y$  общими формулами (6), откуда следует:

$$E_y(M; \delta) = \frac{1}{-ik} \frac{\partial^2 Z_e}{\partial y \partial z} - \frac{\partial Z_m}{\partial x}, \quad (58)$$

причем

$$Z_e(M, \delta) = \pm \frac{4\pi}{c} J_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)}{2\lambda_n} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial \eta} f(\eta) d\eta e^{-\rho_n \delta},$$

$$Z_m(M, \delta) = -ik \frac{4\pi}{c} J_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M)}{2\hat{\rho}_n \hat{\lambda}_n} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{\partial \hat{\psi}_n(M_0)}{\partial x_0} f(\eta) d\eta e^{-\hat{\rho}_n \delta}.$$

Пользуясь выражениями для собственных функций:

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y,$$

находя по формуле (58)  $E_y$  и подставляя в (57), получим после ряда преобразований:

$$R = \frac{4\pi}{ck} i \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\epsilon_n \left[ \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 - k^2 \right] \sin^2 \frac{\pi m}{a} d A_n^2}{ab \cdot 2p_{nm} \delta} e^{-p_{nm} \delta}. \quad (59)$$

При этом мы использовали соотношения:

$$\lambda_{mn} = \hat{\lambda}_{mn} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right); \quad p_{mn} = \hat{p}_{mn} = \sqrt{\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - k^2}.$$

Вычисления дают:

$$A_n = \int_{Y_1}^{Y_2} \cos \frac{\pi n}{b} \eta \sin k(\eta - y_1) d\eta = \frac{-2k}{(\pi n/b)^2 - k^2} \cos \frac{\pi^2 n}{2bk} \cos \frac{\pi n}{b} \left( y_1 + \frac{\pi}{2k} \right)$$

Разделяя в (59) мнимую и действительную части, приходим к следующим выражениям для активной и реактивной составляющих входного сопротивления:

$$R^{(a)} = \frac{8\pi}{c} k \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ (\lambda_{mn} < k^2)}}^{\infty} \frac{2\epsilon_n \sin^2 \frac{\pi m}{a} d \cos^2 \frac{\pi n}{b} \left( y_1 + \frac{\pi}{2k} \right) \cos^2 \frac{\pi^2 n}{2bk}}{ab \cdot p_{mn} [k^2 - (\pi n/b)^2]}, \quad (60)$$

$$R^{(r)} = -\frac{8\pi k}{c} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_m \sum_{\substack{n \\ (\lambda_{mn} > k^2)}}^{\infty} \frac{2\epsilon_n \sin^2 \frac{\pi m}{a} d \cos^2 \frac{\pi n}{b} \left( y_1 + \frac{\pi}{2k} \right) \cos^2 \frac{\pi^2 n}{2bk}}{ab \cdot p_{mn} [(\pi n/b)^2 - k^2]} e^{-p_{mn} \delta} \quad (61)$$

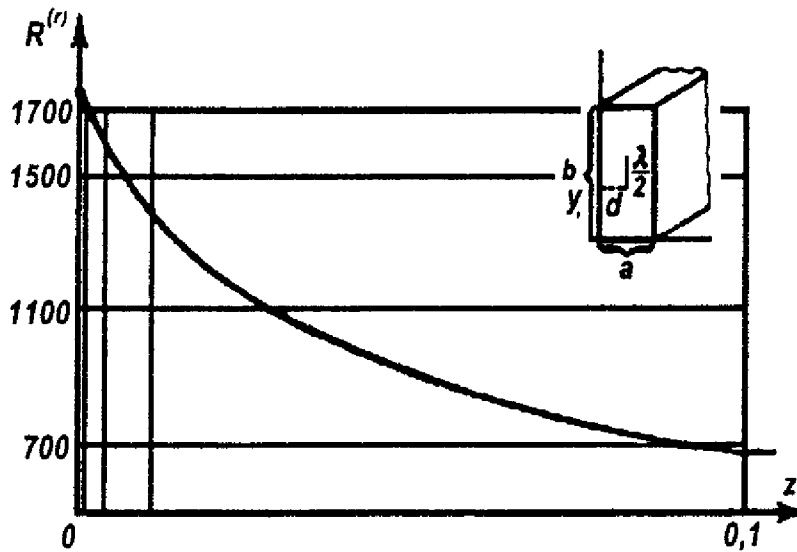


Рис. 3

На рис. 3 дается функция

$$F(\delta) = \frac{8\pi}{c} k \sum_{\substack{m \\ (\lambda_{mn} > k^2)}}^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{2\epsilon_n \sin^2 \frac{\pi m}{a} d \cos^2 \frac{\pi n}{b} (y_1 + \frac{\pi}{2k}) \cos^2 \frac{\pi^2 n}{2bk}}{p_{mn} \left[ \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 - k^2 \right]} e^{-p_{mn}\delta} \quad (62)$$

(для случая, когда в волноводе распространяется только волна  $H_{10}$  ( $m = 1, n = 0$ )), показывающая характер стремления к пределу выражения, стоящего под знаком  $\lim$  в (61)<sup>8</sup>.

В отличие от случая диполя, параллельного оси, где решение дается в виде хорошо сходящихся рядов, только что рассмотренный пример, хотя и показывает возможность расчета реактанца полуволнового диполя, перпендикулярного оси, однако сходимость рядов, определяющих реактанц, является весьма медленной.

В заключение авторы пользуются возможностью, чтобы выразить благодарность Ю. С. Фролову за помощь при проведении вычислений.

<sup>7</sup>Все экспоненциальные множители при  $z = 0$  равны единице. Однако перестановка суммирования и интегрирования в этой формуле не представляется возможной, что очевидно, если положить  $d = \frac{a}{2}$ . В этом случае первая сумма, равная  $\sum'_m \left[ \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - k^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$ , где ' указывает на то, что суммирование производится по нечетным значениям индексов, является расходящейся.

<sup>8</sup>Приведенный график имеет иллюстративное значение и не претендует на точность.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Schelkunoff S.A. Proc. Inst. Rad. Eng., 24, 1383, 1936.
2. Мандельштам Л.И. ЖЭТФ, 15, 605, 1945.
3. Слэтер Дж. Передача ультракоротких радиоволн, гл. VII, 1936, ОГИЗ.
4. Кисунько Г.В. ЖТФ, XVI, 565, 1946.
5. Левин М.Л. ДАН, 51, 1946.
6. Самарский А.А. и Тихонов А.Н. ЖТФ, вып. 7, 1948.
7. Самарский А.А. и Тихонов А.Н. ЖТФ, XVI, 1283, 1947.
8. Самарский А.А. и Тихонов А.Н. ЖТФ, XVI, 1431, 1947.
9. Левин М. Л. ДАН, 51, 1946.
10. Самарский А.А. и Тихонов А.Н. ЖТФ, вып. 7, 1948.
11. Тихонов А.Н. и Самарский А.А. ЖЭТФ (в печати).
12. Левин М.Л. Известия АН СССР, серия физ., XI, 704, 1947.