О ВЛИЯНИИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ЗАМКНУТЫХ ОБЪЁМОВ *

А.А. САМАРСКИЙ

Большое число задач из различных областей физики приводится к задачам на отыскание собственных значений уравнения

$$\Delta u + \lambda^0 u = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u = 0 \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0 \tag{3}$$

При этом часто возникает вопрос об изменении собственных частот в зависимости от изменения области.

В 1927 году П.Эренфест [1] столкнулся с аналогичным вопросом при написании уравнения Шрёдингера для идеального одноатомного газа. Ошибочно считая, что закрепление n-мерного объёма по многообразию $n - 3$ измерений, являющееся следствием абсолютной непроницаемости молекул, приводит к радикальному изменению спектра собственных частот, Эренфест получил статистику Ферми– Дирака для идеального одноатомного газа; при этом он пользовался только требованием абсолютной непроницаемости молекул. Вскоре, однако, Эренфест вынужден был отказаться [2] от полученных им результатов.

А. Витт и С. Шубин, пытаясь разъяснить ошибку Эренфеста, доказали [3] в 1931 г. следующую теорему.

Если закрепить на мембране конечное число областей, то при стягивании этих областей в точки, причём и площади областей и длины стягивающих их кривых стремятся к нулю, частоты колебаний мембраны будут стремиться принять те первоначальные значения, которые они имели до закрепления.

Вопрос о возможности самого закрепления мембраны в точке авторы не исследуют.

В настоящей работе исследуется проблема закрепления замкнутых объёмов произвольного числа измерений и 1) устанавливается наиболее

*ДАН СССР, т. LXIII, №6, 1948 г., с.631-634.

широкий класс множеств (множества ёмкости нуль), закрепление по которым не меняет собственных частот; 2) вычисляется поправка для собственных значений при закреплении по малым областям.

§ 1. Рассмотрим некоторую область T, ограниченную замкнутой поверхностью Γ, удовлетворяющей условию Ляпунова [4]. Пусть E – произвольное замкнутое множество, целиком содержащееся внутри T; T_e – дополнение E до T. Аппроксимируем область T_e последовательностью областей $\{\tau_n\}$ с границами $\{\gamma_n\}$ и Γ, причём $\tau_n \subset \tau_{n+1} \subset \ldots \subset T_e$. Обозначим через g_n дополнение замкнутой области τ_n до T.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\Delta v + \lambda v = 0 \text{ в } T, \\ &v = 0 \text{ на } \Gamma \qquad\qquad (1') \\ &v = 0 \text{ на } E \text{ (условие закрепления)} \end{aligned}$$

Вместо этой задачи мы будем изучать следующие задачи для областей τ_n

$$\begin{aligned} &\Delta v^{(n)} + \lambda^{(n)} v^{(n)} = 0 \text{ в } \tau_n \\ &v^{(n)} = 0 \text{ на } \gamma_n \qquad\qquad (1^{(n)}) \\ &v^{(n)} = 0 \text{ на } g_n \end{aligned}$$

Нас интересует изменение собственных значений λ_k^0 при введении дополнительного требования закрепления ($v = 0$ на E) для собственных функций, а также зависимость этого изменения от структуры множества E.

Мы воспользуемся экстремальной теорией собственных значений, рассматривая вместо задачи (1) и $(1^{(n)})$ соответствующие вариационные задачи для функционалов

$$D[\varphi] = \int_T (\nabla\varphi)^2 d\tau \qquad (4)$$

и

$$D[\psi_n] = \int_{\tau_n} (\nabla\psi_n)^2 d\tau, \qquad (5)$$

где φ и ψ_n– допустимые функции сравнения.

Множество E мы характеризуем ёмкостью, введённой впервые Винером [5]. Назовём ёмкостью множества E относительно границы Γ величину

$$c(E, \Gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial S^0}{\partial \nu} d\sigma, \tag{6}$$

где $S^0 = \lim_{n\to\infty} S_n^0$, $\Delta S_n^0 = 0$ в τ_n, $S_n^0 = 0$ на Γ, $S_n^0 = 1$ на γ_n; Σ – любая гладкая поверхность, содержащая E.

§2. *Теорема* 1. Если функция $v(M)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta v + \lambda_1 v = 0 \tag{7}$$

и ограничена в окрестности множества E нулевой ёмкости, то она дифференцируема и удовлетворяет уравнению (7) во всех точках множества E.

Следствие. Если существует функция $v(M)$, удовлетворяющая уравнению (7), граничному условию $v = 0$ на Γ и дополнительному условию на множестве ёмкости нуль, то она является собственной функцией порядка выше первого для уравнения (7).

Определение 1. Совокупность всех внутренних точек области T, в которых обращается в нуль решение уравнения (1), назовём полным множеством закрепления.

Теорема 2. Множество ёмкости нуль не может быть полным множеством закрепления.

Таким образом, закрепление по множеству ёмкости нуль не является характерным для уравнения (1) и всегда связано с закреплением по множеству положительной ёмкости. Известно, что всякое физически реальное закрепление, например мембраны, производится по некоторой области. Из теоремы 2 следует, что закрепление в одной изолированной точке лишено и математического смысла.

Поэтому, если мы хотим говорить о закреплении в точке, то под этим следует понимать закрепление по малой области, содержащей данную точку.

Определение 2. δ-закреплением по множеству E будем называть закрепление по области, содержащейся в δ-окрестности U_E^δ множества E ($\delta > 0$ – любое сколь угодно малое число).

Определение 3. Назовём $\tilde{\lambda}_k$ "собственным значением для квази-закрепления по множеству E", если $\tilde{\lambda}_k$ является пределом при

$\delta \to 0$ собственных значений λ_k^δ, соответствующих δ-закреплению по множеству E.

Заметим, что: 1) мы ничего не предполагаем о площади поверхности, являющейся границей области закрепления (соответствующее предположение в теореме Витта-Шубина являются излишними); 2) предельные значения $\tilde{\lambda}_k$ могут и не соответствовать реальному закреплению; 3) результат Витта и Шубина можно выразить словами: при квази-закреплении мембраны в конечном числе точек её тона остаются неизменными.

§ 3. Основной целью нашей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. При квази-закреплении основной области T по множеству E ёмкости нуль собственные значения уравнения $\Delta u + \lambda^0 u = 0$ при граничном условии $u = 0$ на Γ остаются неизменными.

Теорема 4. Для того чтобы наименьшее собственное значение уравнения $\Delta u + \lambda^0 u = 0$ при $u = 0$ на Γ оставалось неизменным при квази-закреплении основной области по множеству E, необходимо и достаточно, чтобы ёмкость множества E была равна нулю.

Нетрудно убедиться в том, что все полученные выше результаты могут быть распространены на случай краевого условия вида

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0 \text{ на } \Gamma,$$

а также на уравнения общего вида:

$$L[u] + \lambda \rho u = 0,$$

где $L[u] = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu$.

§ 4. Таким образом, из теоремы 3 следует, что если область закрепления мала, то и собственные значения меняются мало. Нами найден порядок величины изменения собственных значений.

Теорема 5. При закреплении основной области T по множеству E малой ёмкости наименьшее собственное значение λ_1^0 уравнения $\Delta u + \lambda_1^0 u = 0$ меняется на величину, имеющую порядок ёмкости множества E, точнее,

$$\Delta\lambda_1 \leq 4\pi\kappa_1^2\, c(E, \Gamma) + \ldots, \tag{8}$$

где κ_1 – максимальное значение первой собственной функции u_0^1 на E, $c(E, \Gamma)$ – ёмкость множества E относительно Γ.

Ёмкость малой области E имеет более низкий порядок малости по сравнению с объёмом $V(E)$ (если ε – диаметр области E, то $c(E) \sim 1/\ln(1/\varepsilon)$ в двумерном случае и $c(E) \sim \varepsilon$ в трёхмерном случае, а $V(E) \sim \varepsilon^2$ и $V(E) \sim \varepsilon^3$, соответственно).

В формуле (8) точками обозначены члены более высокого порядка малости по сравнению с первым членом $4\pi\kappa_1^2 c(E, \Gamma)$.

Пример круглой мембраны, закреплённой в центре по малому кругу, показывает, что коэффициент перед ёмкостью не может быть изменён. Для первого собственного значения оценка (8) является точной. Для собственных значений высокого порядка аналогичная оценка также верна, однако лишь для более малых областей и притом в мажорантном смысле. Очевидно, что эта оценка является более точной при закреплении по изолированной области E. Вопрос равномерности оценки нами не исследован.

В заключение автор выражает выражает горячую благодарность члену-корреспонденту АН СССР А.Н.Тихонову, по предложению и под руководством которого выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P.Ehrenfest*, Die Naturwissenschaften, 15, H.7(1927); *P.Ehrenfest u.G.E.Uhlenbeck*, Z.f.Phys., 41, 576(1927)
2. *P.Ehrenfest*, Die Naturwissenschaften, 15, H.11(1927)
3. *А.Витт, С.Шубин*, ЖТФ, 1, в.2-3 (1931)
4. *N.M.Gunther*, La theorie du potentiel et ses applications aux problemes fondamentaux de la physique mathematique, Paris, 1934
5. *N.Wiener*, J.Math. Phys., 3, 24(1924); *М.В.Келдыш*, Усп. мат. наук, N8(1940).