ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 ★ 1947 г.

А. А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА. II *

В первой части настоящей работы нами было получено решение задачи нагревания ограниченного тонкого стержня точечной печью, обладающей конечной теплоемкостью. Решение, построенное в виде рядов, нуждалось в математическом исследовании и обосновании, что и сделано в настоящей II части. При этом оказалось необходимым воспользоваться теорией интегральных уравнений в интегралах Стильтьеса или, что в данном случае одно и то же, теорией нагруженных интегральных уравнений, которые в свое время были исследованы Кнезером [1], Гюнтером [2], Лихтенштейном[3].

В § 5 доказана единственность решения с помощью широко применяемого А. Н. Тихоновым метода экстремумов, который для рассматриваемых разрывных решений требует ряда модификаций.

В ч. I нашей работы была поставлена задача нагревания ограниченного стержня точечной печью, трактуемой как сосредоточенная теплоемкость, при условии учета теплообмена с окружающей средой. Решение соответствующей математической задачи, представляющее собой разрывную функцию, было найдено в виде рядов

$$U(x,t)=\begin{cases} \overline{u}(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \quad (0<x\leqslant l) \\ \text{(температура стержня)} \\ \overline{U}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n X_n(0)\, e^{-\lambda_n t} \quad (x=0), \\ \text{(температура печи)} \end{cases} \tag{1}$$

где $\left\{\begin{matrix}\overline{u}(x)\\ \overline{U}\end{matrix}\right\}$ — стационарная температура системы, $\left\{\begin{matrix}X_n(x)\\ X_n(0)\end{matrix}\right\}$ и λ_n — собственные функции и собственные значения соответствующей задачи Штурма — Лиувилля, A_n — коэфициенты Фурье, определяемые из начального условия

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)=-\overline{U}(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{2}$$

и имеющие вид

$$A_n=-\frac{Q_n X_n(0)}{\lambda_n N\{X_n(x)\}}, \tag{3}$$

причем $N\{X_n\}$ означает норму собственной функции $X_n(x)$.

При этом было доказано, что найденное решение, в силу равномерной сходимости как самих рядов (1), так и рядов, получающихся из

* См. Вестник Московского Университета, 3, 1947.

них двукратным диференцированием по x и однократным диференцированием по t, удовлетворяет уравнению и краевым условиям нашей задачи [1] в области $t > 0$.

Чтобы удовлетворить начальному условию (2) (непрерывность при $t=0$ была уже доказана), необходимо установить возможность разложения функции $\overline{U}(x)$ в ряд по собственным функциям нашей краевой задачи.

Исследуемая нами задача Штурма — Лиувилля отличается от обычных задач тем, что она содержит собственное значение λ в краевом условии. Это не позволяет воспользоваться обычной теорией краевых задач Штурма — Лиувилля, основанной на сведении этих задач к интегральному уравнению с симметрическим ядром. Ниже будет показано, что при соответствующем обобщении эта теория сохраняет силу и в данном случае*.

§ 1

Напомним постановку задачи (для дальнейшего нам удобно писать условия задачи в несколько иной форме).

Найти функцию $U(x, t)$, непрерывную и дважды непрерывно диференцируемую в области $0 < x \leqslant l$ и имеющую конечный разрыв в точке $x=0$, именно:

$$U(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{при } 0 < x \leqslant l \\ U(t) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

из условий

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= C_1\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha_1 U(x, t) \quad (0 < x < l) \\ k\frac{\partial U}{\partial x}(l, t) &= 0 \\ k\frac{\partial U}{\partial x}(0+0, t) &= h\,[U(0+0, t) - U(0, t)] \\ Q_0 - \alpha_2 U(0, t) - C_2\frac{dU(0, t)}{dt} &= -k\frac{\partial U}{\partial x}(0+0, t) \\ U(x, 0) &= 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

где k — коэфициент теплопроводности;

h — коэфициент теплообмена печи со стержнем;

α_1 — коэфициент теплоотдачи стержня в воздух, отнесенный к единице длины;

C_1 — теплоемкость единицы длины стержня;

C_2 — теплоемкость печи;

α_2 — коэфициент теплоотдачи печи в воздух.

Решение мы искали в виде

$$U(x, t) = \overline{U}(x) + V(x, t),$$

где $\overline{U}(x)$ — стационарная температура, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(k\frac{d\overline{U}}{dx}\right) &= \alpha_1\overline{U}(x) \\ k\frac{d\overline{U}}{dx}(l) &= 0 \\ k\frac{d\overline{U}}{dx}(0+0) &= h\,[\overline{U}(0+0) - \overline{U}(0)] \\ Q - \alpha_2\overline{U}(0) &= -k\frac{d\overline{U}}{dx}(0+0) \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

* Настоящая работа выполнена под руководством члена-корреспондента АН СССР А. Н. Тихонова.

а $V(x, t) = U(x, t) - \overline{U}(x)$ представляет собой отклонение от стационарной температуры и удовлетворяет однородным условиям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial V}{\partial x}\right) &= C_1\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha_1 V(x, t) \\ V(x, 0) &= -\overline{U}(x) \\ k\frac{\partial V}{\partial x}(l, t) &= 0 \\ k\frac{\partial V}{\partial x}(0+0, t) &= h[V(0+0, t) - V(0, t)] \\ \alpha_2 V(0, t) + C_2\frac{dV(0, t)}{dt} &= k\frac{\partial V}{\partial x}(0+0, t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Обычный метод разделения $V(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ дает, что $T(t) = e^{-\lambda t}$, а функция $X(x)$ определяется из условий

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(k\frac{dX}{dx}\right) - \alpha_1 X(x) + C_1\lambda X(x) &= 0 \\ kX'(l) &= 0 \\ kX'(0+0) &= h[X(0+0) - X(0)] \\ C_2\lambda X(0) - \alpha_2 X(0) &= -kX'(0+0) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Условиям этой задачи Штурма — Лиувилля нового типа может быть дана простая физическая интерпретация, именно: условия (IV) определяют стационарную температуру, которая устанавливается в нашей системе, если распределить дополнительные тепловые источники с плотностью $C_1 q_1(x) = C_1\lambda X(x)$ и $C_2 q_2 = C_2\lambda X(0)$; их появление связано с нестационарным характером изучаемого теплового процесса, сведенного нами к данному стационарному процессу. В дальнейшем будем называть $C_1\lambda X(x)$ и $C_2\lambda X(0)$ динамическими тепловыми нагрузками.

§ 2

Рассмотрим теперь задачу, в которой члены, содержащие λ, заменены известными функциями

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(k\frac{d\varphi}{dx}\right) - \alpha_1\varphi(x) + C_1 q_1(x) &= 0 \\ k\varphi'(l) &= 0 \\ k\varphi'(0+0) &= h[\varphi(0+0) - \varphi(0)] \\ C_2 q_2 - \alpha_2\varphi(0) &= -k\varphi'(0+0) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

Здесь $C_1 q_1(x)$ и $C_2 q_2$ — дополнительное количество тепла, выделяющееся в точке x отрезка $0 < x \leqslant l$ и в точке $x = 0$; в частности, это может быть тепловая нагрузка динамического происхождения. Покажем, что решение данной краевой задачи (V) может быть представлено истокообразно с помощью симметрической функции Грина $G(x, s)$, определенной в квадрате $0 \leqslant (x, s) \leqslant l$, включая его границы; физический смысл функции Грина ясен: это — температура в точке x нашей системы, вызываемая источником, помещенным в точку s, при условии отсутствия внешних дополнительных нагрузок.

Очевидно, что функция Грина $G(x, s)$ должна определяться условиями (при этом следует различать два случая: 1) источник помещен на стержне, т. е. $0 < s \leqslant l$, и 2) источник помещен в печь, т. е. в точку $s = 0$):

1. В области $0 < (x, s) \leqslant l$ (источник находится на стержне)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[k\frac{dG(x, s)}{dx}\right] - \alpha_1 G(x, s) = 0 \\ &k\frac{dG}{dx}(l, s) = 0 \\ &k\frac{dG}{dx}(0+0, s) = h\left[G(0+0, s) - G(0, s)\right] \\ &-\alpha_2 G(0, s) = -k\frac{dG}{dx}(0+0, s) \\ &k\frac{dG}{dx}(s-0, s) - k\frac{dG}{dx}(s+0, s) = 1 \\ &G(s-0, s) = G(s+0, s). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Источник находится в точке $s = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[k\frac{dG(x, 0)}{dx}\right] - \alpha_1 G(x, 0) = 0 \\ &k\frac{dG}{dx}(l, 0) = 0 \\ &k\frac{dG}{dx}(0+0, 0) = h\left[G(0+0, 0) - G(0, 0)\right] \\ &\alpha_2 G(0, 0) - k\frac{dG}{dx}(0+0, 0) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Все эти условия поддаются простому физическому истолкованию. В формуле (4_4) величина $-\alpha_2 G(0, s)$ представляет собой количество тепла, теряемое печью через излучение, $-k\frac{dG}{dx}(0+0, s)$ — тепло, втекающее в печь из стержня, в точке s которого помещен источник мощности 1.

В формуле (5_5) $k\frac{dG}{dx}(s-0, s)$ есть тепло, вытекающее из точки s в отрицательном направлении (влево), $-k\frac{dG}{dx}(s+0, s)$ — тепло, вытекающее из точки s в положительном направлении (вправо); их сумма как раз равна теплу, выделяемому источником, т. е. равна 1.

Правая часть формулы (5_4) выражает количество тепла, выделяемое в печи единичным источником, а левая часть — потерю на излучение и на теплоотдачу стержня.

Решая (4) и (5), находим функцию Грина в следующем виде:

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Ch}\beta(s-l)\left[k\beta\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{\alpha_2}\right)\operatorname{Ch}\beta x + \operatorname{Sh}\beta x\right]}{k\beta\operatorname{Sh}\beta l\left[\operatorname{Cth}\beta l + k\beta\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]} & (0 < x \leqslant s) \\[2ex] \dfrac{\left[\operatorname{Sh}\beta s + k\beta\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{\alpha_2}\right)\operatorname{Ch}\beta s\right]\operatorname{Ch}\beta(x-l)}{k\beta\operatorname{Sh}\beta l\left[\operatorname{Cth}\beta l + k\beta\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]} & (0 < s \leqslant x \leqslant l) \\[2ex] \dfrac{\operatorname{ch}\beta(s-l)}{\alpha_2\operatorname{Sh}\beta l\left[\operatorname{Cth}\beta l + k\beta\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]} & (0 < s \leqslant l,\ x = 0) \\[2ex] \dfrac{\operatorname{Ch}\beta(x-l)}{\alpha_2\operatorname{Ch}\beta l\left[\operatorname{Cth}\beta l + k\beta\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]} & (s = 0,\ 0 < x \leqslant l) \\[2ex] \dfrac{\operatorname{Cth}\beta l + k\beta\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{\alpha_2}\right)}{\alpha_2\left[\operatorname{Cth}\beta l + k\beta\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]} & (s = 0,\ x = 0). \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $Q(s)$ — количество тепла, выделяющееся за счет дополнительных распределенных источников на отрезке от 0 до s, так что

$$Q(s)=\int_{0+0}^{l} C_1 q_1(s)\,ds+C_2 q_2 \quad (0<s\leqslant l) \tag{7}$$

$$Q(0)=0.$$

Тогда, очевидно, решение краевой задачи (V) можно представить в виде

$$\varphi(x)=\int_{0}^{l} G(x, s)\,dQ(s) \qquad (0\leqslant x\leqslant l), \tag{8}$$

где интеграл взят в смысле Стильтьеса [4].

Пользуясь известным свойством интегралов Стильтьеса [4] и учитывая разрывный характер функции $\varphi(x)$, можно уравнение (8) записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\int_{0+0}^{l} G(x, s)\,C_1 q_1(s)\,ds+G(x, 0)\,C_2 q_2 \qquad (0<x\leqslant l)\\ \varphi(0)&=\int_{0+0}^{l} G(0, s)\,C_1 q_1(s)\,ds+G(0, 0)\,C_2 q_2 \qquad (x=0)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

или, вводя

$$C(s)=\begin{cases}C_1 s=C_2 & (0<s\leqslant l)\\ 0 & (s=0)\end{cases} \quad \text{и} \quad q(s)=\left\{\begin{matrix}q_1(s) & (0<s\leqslant l)\\ q_2 & (s=0)\end{matrix}\right\}, \tag{10}$$

напишем:

$$\varphi(x)=\int_{0}^{l} G(x, s)\,q(s)\,dC(s). \tag{11}$$

Здесь $C(s)$ представляет собой теплоемкость отрезка от 0 до s.

Подставляя (11) в (V) и учитывая свойства гриновской функции $G(x, s)$, нетрудно убедиться обычными приемами в том, что функция $\varphi(x)$, определяемая формулой (11), действительно является решением задачи (V) и притом единственным.

§ 3

Наша задача Штурма—Лиувилля (IV) соответствует дополнительному требованию ($\varphi(x)$ заменяем на $X(x)$) $q(x)=\lambda X(x)$ или

$$\begin{aligned} q_1(x)&=\lambda X(x) \qquad (0<x\leqslant l)\\ q_2&=\lambda X(0) \qquad (x=0),\end{aligned}$$

т. е. особому типу тепловой нагрузки — динамической нагрузке.

Выводы, полученные для задачи (V), полностью переносятся и на задачу (IV).

Это значит, что

$$X(x)=\lambda\int_{0}^{l} G(x, s)\,X(s)\,dC(s) \qquad (0\leqslant x\leqslant l), \tag{12}$$

что соответствует двум нагруженным интегральным уравнениям:

$$X(x)=\lambda\int_{0+0}^{l} G(x, s)\,X(s)\,C_1\,ds+\lambda G(x, 0)\,C_2\,X(0)\quad (0<x\leqslant l);$$

$$X(0)=\lambda\int_{0+0}^{l} G(0, s)\,X(s)\,C_1\,ds+\lambda G(0, 0)\,C_2X(0)\quad (x=0).$$

Таким образом задача (IV) эквивалентна интегральному уравнению, в котором интеграл взят в смысле Стильтьеса.

Несомненно, что наиболее естественно было бы трактовать интегральное уравнение (12) с точки зрения общей теории интегральных уравнений в интегралах Стильтьеса. Но к тому же результату можно притти, следуя А. Комаю [5], чрезвычайно простым методом сведения интегральных уравнений в интегралах Стильтьеса к обыкновенным интегральным уравнениям. Для этого следует ввести новые переменные

$$\eta=C(x)\ \text{ и }\ \xi=G(s).$$

Точке $x=0$ соответствует отрезок $(0, C_2)$, интервалу $0<x\leqslant l$ соответствует интервал $C_2<\eta\leqslant C(l)$.

Далее:

$$X(x)=Y(\eta)$$
$$G(x, s)=H(\eta, \xi),$$

причем функции $Y(\eta)$ и $H(\eta, \xi)$ постоянны на отрезке $(0, C_2)$.

Тогда (12) переходит в

$$Y(\eta)=\int_{0}^{C(l)} H(\eta, \xi)\,Y(\xi)\,d\xi\quad [0\leqslant\eta\leqslant C(l)] \tag{13}$$

Очевидно, что ядро $H(\eta, \xi)$ ограничено и симметрично, а решение этого интегрального уравнения сохраняет постоянное значение на отрезке $(0, C_2)$. Поэтому можно для (12) воспользоваться обычной теорией интегральных уравнений с симметрическим ядром. Если затем совершить обратный переход от переменных (ξ, η) к прежним переменным (x, s), то легко убедиться в том, что для нашего уравнения (12) имеет место, в частности, теорема Гильберта-Шмидта: всякая функция вида

$$f(x)=\int_{0}^{l} G(x, s)\,h(s)\,dC(s),$$

где $h(s)$ — функция с интегрируемым квадратом, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $G(x, s)$, т. е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_nX_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции, а c_n — коэфициенты Фурье:

$$c_n=\int_{0}^{l} f(x)\,X_n(x)\,dC(x).$$

Для собственных функций имеет место условие ортогональности:

$$\int_0^l X_m(x)\, X_n(x)\, dC(x) = 0 \quad (m \neq n), \tag{14}$$

которое эквивалентно условию ортогональности с нагрузкой, полученному в ч. I в следующем виде:

$$\int_{0+0}^{l} X_m(x)\, X_n(x)\, C_1\, dx + C_2 X_m(0)\, X_n(0) = 0 \quad (m \neq n).$$

§ 4

Убедимся теперь, что функция $U(x, t)$, представленная в виде рядов (1) для всех $0 \leqslant x \leqslant l$, удовлетворяет начальному условию, т. е.

$$U(x, 0) = \overline{U}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = 0, \tag{15}$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = -\overline{U}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{16}$$

Для этого достаточно доказать, что функция $\overline{U}(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям нашей задачи Штурма — Лиувилля.

Сравнение условий (II), из которых находится $\overline{U}(x)$, с условиями краевой задачи (V) показывает, что задача (II) является частным случаем задачи (V), соответствующим $C_1 q_1(x) = 0$, $C_2 q_2 = Q_0$. Следовательно, функция $\overline{U}(x)$ может быть представлена истокообразно с помощью симметрического ядра $G(x, s)$ в виде

$$\overline{U}(x) = \int_0^l G(x, s)\, C_1 q_1(s)\, ds + G(x, 0)\, C_2 q_2, \tag{17}$$

откуда, в силу условий $C_1 q_1(x) = 0$, $C_2 q_2 = Q_0$, получаем:

$$\overline{U}(x) = G(x, 0)\, Q_0, \tag{18}$$

что, в силу разрывности $\overline{U}(x)$ в точке $x = 0$, эквивалентно двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{U}(x) = \overline{u}(x) = G(x, 0)\, Q_0, \quad \text{если} \quad 0 < x \leqslant l \\ &\overline{U}(0) = \overline{\overline{U}} = G(0, 0)\, Q_0, \quad \text{если } x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

На основании сформулированной в предыдущем параграфе теоремы Гильберта-Шмидта заключаем, что функция $\overline{U}(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ ряд по собственным функциям ядра $G(x, s)$; т. е.

$$-\overline{U}(x) = \sum A_n X_n(x).$$

Нетрудно убедиться в том, что коэфициенты A_n действительно определяются формулой (3), полученной в ч. I непосредственно из уравнения и краевых условий. В самом деле, пользуясь интегральным представлением для $\overline{U}(x)$, находим:

$$A_n = -\frac{1}{N\{X_n\}}\left\{\int\limits_{0+0}^{l} \overline{U}(x) X_n(x) C_1\,dx + \overline{U}(0) X_n(0)\ G_2\right\} =$$

$$= -\frac{Q_0}{N\{X_n\}}\left\{\int\limits_{0+0}^{l} G(x, 0) X_n(x) C_1\,dx + X_n(0) G(0, 0) C_2\right\},$$

откуда

$$A_n = -\frac{Q_0 X_n(0)}{\lambda_n N\{X_n\}},$$

т. е., как и следовало ожидать, прежний результат (3).

Итак, действительно,

$$U(x, 0) = \overline{U}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = 0.$$

Таким образом нами доказано существование решения задачи (I) в виде рядов (1). Эти ряды удовлетворяют уравнению, краевым и начальным условиям и представляют собою функцию, непрерывную в области $0 < x \leqslant l$ и имеющую конечный разрыв в точке $x = 0$.

§ 5

Единственность решения. Докажем теперь, что решение задачи (I), найденное выше, является единственным, т. е. что температура $U(x, t)$ системы однозначно определяется условиями (1).

Допустим, что $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ — два различных решения, каждое из которых удовлетворяет всем условиям (I). Тогда разность $V(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$ удовлетворяет однородным условиям:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \beta^2 V(x, t) \qquad (0 < x < l)$$

$$V(x, 0) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

$$k\frac{\partial V}{\partial x}(l, t) = 0$$

$$k\frac{\partial V}{\partial x}(0+0, t) = h[V(0+0, t) - V(0, t)]$$

$$\alpha_2 V(0, t) + C_2\frac{dV(0, t)}{dt} = k\frac{\partial V}{\partial x}(0+0, t),$$

причем $V(x, t)$, определенная в области $0 < x \leqslant l$, может быть непрерывно дополнена при $x = 0$, так как каждое из решений $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ обладает этим свойством.

Для того чтобы убедиться, что $V(x, t) \equiv 0$, покажем, что функция $V(x, t)$ не может достигать положительного максимального или отрицательного минимального значений нигде в области $t > 0$. При этом можно рассматривать $V(x, t)$ не как разрывную функцию, а в виде двух непрерывных функций: функции $v(x, t)$, определенной на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, совпадающей с $V(x, t)$ в интервале $0 < x \leqslant l$ и дополняемой по непрерывности в точке $x = 0$, и функции $V(t) = V(0, t)$.

В силу теоремы Вейерштрасса, функция $v(x, t)$ должна достигать своего максимального значения в замкнутой области

$G (0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, где T — некоторое положительное число, а функция $V(t)$ — на отрезке $\overline{g}\,(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Допустим, что наибольшее из максимальных значений функции $v(x, t)$ и $V(t)$ положительно. Для того чтобы доказать, что это невозможно, рассмотрим несколько случаев положения точки, в которой достигается это наибольшее максимальное значение.

1. Функция $V(t)$ не может достигать положительного максимального значения при $t > 0$, т. е. в точке $M_1 (t = t_1)$ отрезка g, большего, чем максимальное значение функции $v(x, t)$. Действительно, пусть

$$\sup V(t) = V(t_1) > 0$$

и

$$V(t_1) > \sup v(x, t).$$

Из неравенства

$$\alpha_2 V(t_1) + C_2 \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_1} = k\frac{\partial V}{\partial x}(0, t_1)$$

видно, что

$$k \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(0, t_1) > 0.$$

С другой стороны,

$$k\frac{\partial v}{\partial x}(0, t_1) = h\,[v(0, t_1) - V(t_1)],$$

откуда следует

$$v(0, t_1) > V(t_1),$$

что и опровергает наше предположение.

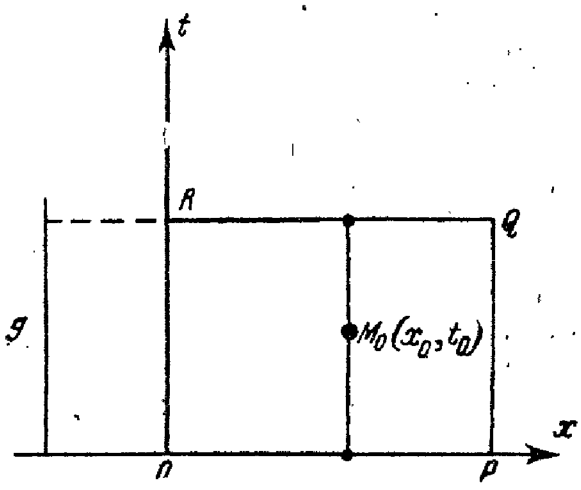

Рис. 1.

Таким образом наибольшее максимальное значение для пары функций $v(x, t)$ и $V(t)$, если оно существует, могло бы достигаться только функцией $v(x, t)$. Покажем, однако, что и это невозможно.

2. Функция $v(x, t)$ не может достигать положительного максимального значения ни во внутренней точке $M_0(x_0, t_0)$ области G, ни на стороне QR (см. рис. 1) границы G, так как это означало бы, что

$$v(x_0, t_0) > 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geqslant 0$$

(знак $>$ соответствует точке M_0 на QR).

Тогда

$$L[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left[-\frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t}\right] + (-\beta^2 v) < 0,$$

что невозможно, так как функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению $L[v] = 0$ всюду внутри G и на стороне QR.

3. Функция $v(x, t)$ не может достигать положительного максимального значения и в точке $(0, t_2)$ границы OR области G. Предположим,

что

$$\sup v(x, t) = v(0, t_2) > 0;$$

тогда

$$k \frac{\partial v}{\partial x}(0, t_2) \leqslant 0 \text{ и } v(0, t_2) \geqslant V(t_2).$$

Равенство

$$k \frac{\partial v}{\partial x}(0, t_2) = h [v(0, t_2) - V(t_2)]$$

возможно только при $v(0, t_2) = V(t_2)$ или $\sup v(x, t) = V(t_2)$, что невозможно по доказанному в п. 1.

4. Наконец, положительное максимальное значение $v(x, t)$ не может достигаться и при $x = l$.

Пусть

$$\sup v(x, t) = v(l, t_3) = c > 0.$$

Составим функцию $w(x, t) = v(x,t) + \lambda \operatorname{Sh} \beta(l-x)$, где λ — произвольная положительная величина ($\lambda > 0$), а второе слагаемое есть решение того же уравнения, что и $v(x, t)$.

Мы имеем:

$$w(l, t_3) = v(l, t_3)$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial t} + \beta^2 w(x, t),$$

т. е. ни внутри области G, ни на отрезке QR функция $w(x, t)$ не достигает наибольшего положительного значения в силу пункта 2.

При $x = 0$ получаем:

$$w(0, t) = v(0, t) + \lambda \operatorname{Sh} \beta l.$$

Очевидно, что

$$\sup v(0, t) = v(0, t^*) < c,$$

как то следует из доказанного в пункте 3.

Выберем такое λ, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \lambda < \frac{c - v(0, t^*)}{\operatorname{Sh} \beta l}.$$

Тогда

$$\sup w(l, t) > \sup w(0, t)$$
$$w(x, 0) = \lambda \operatorname{Sh} \beta l < c.$$

Таким образом $w(x, t)$ может достигать положительного максимального значения только при $x = l$.

Пусть

$$\sup w(x, t) = w(l, t_3^*) = v(l, t_3^*) = c > 0,$$

Следовательно,

$$\frac{\partial w}{\partial x}(l, t_3^*) \geqslant 0,$$

что невозможно, так как

$$\frac{\partial w}{\partial x}(l, t_3^*) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, t_3^*) - \lambda\beta = -\lambda\beta < 0,$$

в силу условий

$$\frac{\partial v}{\partial x}(l, t_3^*)=0 \text{ и } \lambda > 0.$$

Аналогично доказывается отсутствие отрицательных минимальных значений у функции $v(x, t)$ и $V(t)$.

Далее, так как при $t=0$ обе функции равны нулю, то из предыдущего следует, что обе функции

$$v(x, t)\equiv 0,$$
$$V(t)\equiv 0,$$

откуда и следует единственность решения нашей задачи.

Кафедра математики

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Kneser. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 1922, S. 191—197.
A. Kneser. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 38, 1914.
2. N. Günter. Studia Mathematica, t. IV, 1932.
3. L. Lichtenstein. Studia Mathematica, t. III, 1931.
4. Гливенко. Интеграл Стильтьеса, ОНТИ, 1936, стр. 78—75, 100.
5. Комай А. Труды ЦАГИ им. Жуковского, 472, 1940.