О ВОЗБУЖДЕНИИ РАДИОВОЛНОВОДОВ. II [1]

А. А. Самарский и А. Н. Тихонов

Основной целью настоящей статьи является определение электромагнитного поля в волноводе, возбуждаемого произвольно ориентированным элементарным током.

Для решения этой задачи достаточно определить продольные компоненты поля E_z и H_z, так как остальные компоненты поля ими вполне определяются (§ 2). Функции $E_z(x, y, z)$ и $H_z(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

краевым условиям на поверхности волновода

$$\left.\begin{aligned} E_z &= 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

и принципу излучения на бесконечности.

Для определения этих функций достаточно знать характер их особенности в источнике.

Характер особенностей полей определяется только условиями излучения в источнике и тем самым для его выяснения достаточно рассмотреть аналогичную задачу в неограниченном пространстве.

Пользуясь полученными решениями для элементарных токов, можно вычислить электромагнитные поля, соответствующие возбуждению волноводов линейными, поверхностными и объемными токами.

Вопрос о возбуждении волновода объемными токами рассматривался Кисунько [2]. Слэтер [3], а затем Вольман решали методом отражений задачу о диполе в прямоугольном волноводе, параллельном одной из сторон перпендикулярного сечения.

§ 1. Рассмотрим бесконечный полый цилиндр Σ с идеально проводящими стенками, форма которого определяется кривой C, а перпендикулярное сечение представляет собой область S.

Пусть внутри Σ расположен прямолинейный ток L силы $I(s)e^{-i\omega t}$, где s — длина дуги на L. Найдем поля, возбуждаемые током L. При этом будем исходить из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= -ik\vec{E}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= ik\vec{H}, \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\left(k = \frac{\omega}{c}\right).$$

Условия возбуждения на токе берем в следующем виде

$$\oint_{K_\varepsilon} H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} I, \tag{4}$$

где K_ε — бесконечно малый контур, охватывающий ток, или, точнее $H_s \approx \frac{2I}{c\rho}$ вблизи тока (4′), причем ρ обозначает расстояние от точки M_0 до точки наблюдения M на контуре K_ε.

Для простоты рассмотрим сначала бесконечно малый элемент тока, расположенный в точке $[M_0(x_0, y_0), \zeta]$ перпендикулярно к оси волновода и вдоль оси y.

Будем искать поля в виде

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}' + k^2\vec{\Pi}' + \vec{E}_1 \\ \vec{H} &= -ik\operatorname{rot}\vec{\Pi}' + k^2\vec{\Pi}' + \vec{H}_1 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где $\vec{\Pi}' = \Pi'\vec{i}_2$, $\vec{i}_2$ — орт оси y, Π' — любая функция, имеющая особенность типа $\frac{e^{ikr}}{r}$ в точке $[M_0(x_0, y_0), \zeta]$, а векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$ представляют собой поля, не имеющие особенностей на токе.

Например, мы можем выбрать $\Pi' = \frac{e^{ikr}}{r}$.[1]

В этом случае мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} E_z &= \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) + E_{1z} \\ H_z &= -ik\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) + H_{1z} \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Остальные компоненты поля не выписываем.

Составляющие электромагнитного поля E_z и H_z должны удовлетворять волновому уравнению, краевым условиям $E_z = 0$, $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ на Σ и условию излучения на бесконечности. Формулы (6) показывают, что функции E_z и H_z определяются как функции, удовлетворяющие перечисленным условиям с особенностями типа $\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)$ в источнике. Отсюда непосредственно следует возможность следующего представления

$$E_z = -\frac{\partial^2}{\partial y_0\,\partial z}\Pi; \quad H_z = ik\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial x_0}. \tag{7}$$

Здесь Π и $\hat{\Pi}$ — функции точечных источников (первая и вторая функции источника) волнового уравнения, удовлетворяющие принципу излучения и краевым условиям $\Pi = 0$ и $\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial n} = 0$, которые соответствуют краевым условиям для E_z и H_z.

---

[1] Здесь, а также всюду в дальнейшем (как и в предыдущей работе [1]) мы выписываем функции источника и вектора Герца с точностью до нормирующего множителя $N = \frac{I}{ikc} = \frac{I}{i\omega}$, выбираемого в соответствии с условием возбуждения (4) или (4′).

Эти функции, как было нами показано [1], могут быть представлены в виде

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M_0)}{2p_n}\, e^{-p_n|z-\zeta|} = \frac{e^{ikr}}{r} + \pi, \tag{8}$$

$$\hat{\Pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M_0)}{2p_n}\, e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|} = \frac{e^{ikr}}{r} + \hat{\pi}, \tag{9}$$

где π и $\hat{\pi}$ — регулярные всюду решения волнового уравнения, $\psi_n(M)$ и $\hat{\psi}_n(M)$ — собственные функции мембраны S, соответствующие собственному значению λ_n, так что

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0, \quad \psi_n = 0 \quad \text{на} \quad C \left(\frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial n} = 0\right), \tag{10}$$

причем Δ_2 обозначает двухмерный оператор Лапласа и

$$p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}.$$

В самом деле, функция $\frac{e^{ikr}}{r}$ зависит только от разности координат точек $[M(x, y), z]$ и $[M_0(x_0, y_0), \zeta]$ и потому, как показывает вторая форма представления функции Π, правые части формул (7) обладают нужными особенностями. Кроме того, так как $\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial n} = 0$ на Σ по аргументам (M, z) при любом положении точки (M_0, ζ), то отсюда следует, что дифференцирование по параметрам x_0, y_0 не меняет краевых условий.

В этом элементарном рассуждении, по существу, и содержится решение задачи настоящего параграфа.

§ 2. Электромагнитное поле элементарного диполя в волноводе обладает теми же особенностями, что и поле $\left\{\vec{E}^0, \vec{H}^0\right\}$ диполя в неограниченном пространстве. Действие стенок волновода приводит к появлению индуцированных полей, которые регулярны всюду и в сумме с первоначальным полем $\left\{\vec{E}^0, \vec{H}^0\right\}$ удовлетворяют граничным условиям на стенках.

Очевидно, что результирующие поля в волноводе можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^0 + \vec{E}', \\ \vec{H}' &= \vec{H}^0 + \vec{H}', \end{aligned} \tag{11}$$

где $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ — наведенное электрическое и магнитное поля.

Компоненты E_z' и H_z' удовлетворяют волновому уравнению и краевым условиям

$$E_z' = -E_z^0, \quad \frac{\partial H_z'}{\partial n} = -\frac{\partial H_z^0}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{12}$$

Будем считать, что компоненты E_z' и H_z' известны всюду внутри Σ и докажем возможность определения остальных компонент индуцированного поля по заданным E_z' и H_z'. Начнем с компонент электрического поля E_x' и E_y'. На границе Σ имеем условие

$$E_s' = E_x'\alpha + E_y'\beta = F(s), \tag{13}$$

где $F(s)$ — известная функция, а α и β — направляющие косинусы тангенциального направления $\vec{s}$.

Внутри волновода E_x' и E_y' определяются уравнениями Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_x'}{\partial x} + \frac{\partial E_y'}{\partial y} &= -\frac{\partial E_z'}{\partial z} = f_1(M, z) \\ \frac{\partial E_x'}{\partial y} - \frac{\partial E_y'}{\partial x} &= -ikH_z' = f_2(M, z) \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

правые части которых представляют известные функции.

Будем искать решение системы этих уравнений в виде суммы решения неоднородной системы с нулевыми краевыми условиями и решения однородной системы с неоднородными краевыми условиями, т. е.

$$\left.\begin{aligned} E_x' &= u^0 + u \\ E_y' &= v^0 + v \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

где u^0 и v^0 удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} &= f_1 \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} - \frac{\partial v^0}{\partial x} &= f_2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

при краевых условиях

$$u^0 = 0, \quad v^0 = 0 \quad \text{на } C,$$

а функции u и v определяются из условий

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \alpha u + \beta v &= F(s) \text{ на } C \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Попеременно исключая из (31) u^0 или v^0, получим

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 u^0 &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \varphi_1 \\ u^0 &= 0 \text{ на } C \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 v^0 &= \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = \varphi_2 \\ v^0 &= 0 \text{ на } C \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

где $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ — известные функции.

Функции u^0 и v^0 могут быть без труда найдены отсюда с помощью соответствующих функций Грина плоской области S.

Что касается функций $u(M, z)$ и $v(M, z)$, то для них получим известную задачу Гильберта, которая имеет единственное решение.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для компонент магнитного поля H_x' и H_y'.

Таким образом, нами доказана возможность определения всюду, в любом перпендикулярном сечении S волновода, наведенного электромагнитного поля полностью по заданным его компонентам E_z' и H_z'.

§ 3. Пользуясь результатами предшествующего параграфа и значениями E_z и H_z, определенными в § 1, можно было бы непосредственно выписать выражения для остальных компонент поля, причём результат, разумеется, не зависит от способа вычисления.

Чтобы получить в удобной форме выражения для отдельных компонент, найдем электрический и магнитный векторы Герца Π_e и Π_m из формул

$$\left.\begin{aligned} E_z &= \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} + k^2 \Pi_e = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_0\, \partial z} \\ H_z &= \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} + k^2 \Pi_m = ik \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial x_0} \end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

Учитывая, что Π_e и Π_m удовлетворяют волновому уравнению, можно написать (20) следующим образом

$$\Delta_2 \Pi_e = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_0\, \partial z}, \quad \Pi_e = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{21}$$

$$\Delta_2 \Pi_m = -ik \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \widehat{\Pi}_m}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{22}$$

Решение этих уравнений дается формулами

$$\Pi_e(M, M_0; z - \zeta) = -\iint\limits_{(S)} G_2(M, \overline{M}) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_0\, \partial z}\, d\sigma_{\overline{M}}, \tag{23}$$

$$\Pi_m(M, M_0; z - \zeta) = ik \iint\limits_{(S)} \widehat{G}_2(M, \overline{M}) \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial x_0}\, d\sigma_{\overline{M}}, \tag{24}$$

где $G_2(M, \overline{M})$ — функция Грина закрепленной мембраны S, $\widehat{G}_2(M, \overline{M})$ — функция Грина свободной мембраны S.

Поскольку функции Π_e и Π_m определяются аналогичными формулами (23) и (24), то достаточно ограничиться подробным изложением построения функции $\Pi_e(M, M_0, z - \zeta)$.

В качестве функции Π, имеющей особенность $\frac{e^{ikr}}{r}$ в точке (M_0, ζ), мы выберем исследованную нами в ч. I [1] функцию (8).

Рассмотрим случай $\zeta > z$.

Подставляя (8) в (23), интегрируя полученный после дифференцирования по z ряд и учитывая уравнение

$$\psi_n(M) = \lambda_n \iint\limits_{(S)} G_2(M, \overline{M}) \psi_n(\overline{M})\, d\sigma_{\overline{M}},$$

получим

$$\Pi_e = -\frac{\partial}{\partial y_0} \sum_n \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M_0)}{2\lambda_n} e^{-p_n|\zeta - z|}. \tag{25}$$

Для случая $\zeta < z$ имеем

$$\Pi_e = \frac{\partial}{\partial y_0} \sum_n \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M_0)}{2\lambda_n} e^{-p_n|z-\zeta|}. \tag{26}$$

Аналогичные рассуждения приводят к формуле

$$\Pi_m(M, M_0; z-\zeta) = ik\frac{\partial}{\partial x_0} \sum_n \frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M_0)}{2\hat{p}_n\hat{\lambda}_n} e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|}, \tag{27}$$

где $\hat{\lambda}_n$, $\hat{\psi}_n(M)$ — собственные значения и собственные функции свободной мембраны

$$\Delta_2\hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n\hat{\psi}_n = 0, \quad \frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad C. \tag{28}$$

Очевидно, что функции Π_e и Π_m, определяемые формулами (25) — (27), полностью решают поставленную задачу, так как компоненты электрического и магнитного полей могут быть найдены из формул

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}_e + k^2\Pi_e + ik\operatorname{rot}\vec{\Pi}_m \\ \vec{H} &= -ik\operatorname{rot}\vec{\Pi}_e + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}_m + k^2\vec{\Pi}_m \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Отсюда имеем

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial y_0} - k^2\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y_0} + \frac{\partial^2\hat{R}}{\partial x_0\,\partial y}\right) \\ E_y &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\left(\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial y_0} - \frac{\partial^2\hat{R}}{\partial x\,\partial x_0}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} R &= \sum_n \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M_0)}{2p_n\lambda_n} e^{-p_n|z-\zeta|} \\ \hat{R} &= \sum_n \frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M_0)}{2\hat{p}_n\hat{\lambda}_n} e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|}. \end{aligned} \tag{31}$$

Для поперечных компонент магнитного поля находим

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \pm ik\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial y_0} + \frac{\partial^2\hat{Q}}{\partial x\,\partial x_0}\right) \\ H_y &= \mp ik\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y_0} - \frac{\partial^2\hat{Q}}{\partial y\,\partial x_0}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{32}$$

где верхний знак соответствует случаю $z < \zeta$, а нижний — случаю $z > \zeta$. Функции Q и $\hat{Q}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} Q &= \sum_n \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M_0)}{2\lambda_n} e^{-p_n|z-\zeta|}, \\ \hat{Q} &= \sum_n \frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M_0)}{2\hat{\lambda}_n} e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|}. \end{aligned} \tag{33}$$

§ 4. Перейдем к выяснению особенностей векторов Герца; соответствующие им функции источника могут быть записаны в виде

$$\Pi_e = \pm \frac{\partial Q}{\partial y_0}, \tag{34}$$

$$\Pi_m = ik \frac{\partial \hat{R}}{\partial x_0}. \tag{35}$$

Из формулы (34) видно, что при переходе через плоскость $z=\zeta$ функция Π_e испытывает разрыв. Заметим, что при $z=\zeta$ функция $2Q=\sum \frac{\psi_n(M)\psi_n(M_0)}{\lambda_n}$ представляет собой функцию Грина для двухмерного уравнения Лапласа, имеющую особенность в точке $M=M_0$ типа $\ln\frac{1}{\rho}$, где $\rho=\overline{MM_0}$.

Для выяснения характера особенностей функций Π_e и Π_m достаточно рассматривать случай неограниченного пространства. В этом случае, очевидно, вместо уравнений (20) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_e^0}{\partial z^2} + k^2 \Pi_e^0 &= -\frac{\partial^2}{\partial y_0\,\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \\ \frac{\partial^2 \Pi_m^0}{\partial z^2} + k^2 \Pi_m^0 &= ik\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{36}$$

Воспользуемся интегралом Зоммерфельда

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int\limits_0^\infty J_0(\rho\xi)\,\frac{e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}\,|z-\zeta|}}{\sqrt{\xi-k^2}}\,\xi d\xi. \tag{37}$$

Тогда получим вместо (36) уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi_m^0}{\partial z^2} + k^2 \Pi_m^0 = ik\,\frac{x-x_0}{\rho}\int\limits_0^\infty J_1(\rho\xi)\,\frac{e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}\,|z-\zeta|}\,\xi^2\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-k^2}},$$

которому, очевидно, удовлетворяет функция

$$\Pi_m^0 = ik\frac{x-x_0}{\rho}\int\limits_0^\infty J_1(\rho\xi)\,\frac{e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}\,|z-\zeta|}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-k^2}}. \tag{38}$$

С другой стороны, интегрирование (37) по частям для случая $z>\zeta$ дает

$$\frac{e^{ikr}}{r} = -\frac{1}{z-\zeta}\left[J_0(\rho\xi)\,e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}\,(z-\zeta)}\right]_0^\infty - \frac{\rho}{z-\zeta}\int\limits_0^\infty J_1(\rho\xi)\,e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}\,(z-\zeta)}\,d\xi,$$

откуда

$$\int\limits_0^\infty J_1(\rho\xi)\,e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}\,(z-\zeta)}\,d\xi = -\frac{z-\zeta}{\rho}\left[\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ik(z-\zeta)}}{z-\zeta}\right].$$

Подставляя этот результат в формулу

$$\frac{\partial \Pi_m^0}{\partial z} = -ik\frac{x-x_0}{\rho}\int\limits_0^\infty J_1(\rho\xi)\, e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}(z-\zeta)}\, d\xi \qquad (z>\zeta),$$

получаем

$$\frac{\partial \Pi_m^0}{\partial z} = ik\frac{x-x_0}{\rho^2}\left[e^{ikr}\frac{z-\zeta}{r} - e^{ik(z-\zeta)}\right]. \qquad (z>\zeta)$$

Для $z<\zeta$ аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial \Pi_m^0}{\partial z} = ik\frac{x-x_0}{\rho^2}\left[e^{ikr}\frac{z-\zeta}{r} + e^{ik(\zeta-z)}\right]. \qquad (z<\zeta)$$

Нетрудно видеть, что

$$\Pi_m^0 = \frac{x-x_0}{\rho^2}\left(e^{ikr} - e^{ik(z-\zeta)}\right). \tag{39}$$

Аналогично из (36) получаем

$$\left.\begin{aligned} \Pi_e^0 &= \frac{y-y_0}{\rho^2}\left[e^{ikr}\frac{z-\zeta}{r} - e^{ik(z-\zeta)}\right] \quad \text{для} \quad z>\zeta \\ \Pi_e^0 &= -\frac{y-y_0}{\rho^2}\left[e^{ikr}\frac{\zeta-z}{r} - e^{ik(\zeta-z)}\right] \quad \text{для} \quad \zeta>z \end{aligned}\right\}. \tag{40}$$

Формулы (39) и (40) дают точное выражение для особенностей функций Π_e и Π_m в волноводе, так как

$$\Pi_e = \Pi_e^0 + \pi_e, \quad \Pi_m = \Pi_m^0 + \pi_m,$$

где π_e и π_m всюду регулярные функции.

§ 5. Выше мы ограничились изучением простейшего случая элементарного тока, перпендикулярного оси волновода. Применяя принцип суперпозиции полей, сразу же получим решение для конечного тока L, направленного вдоль оси y. Поля будут попрежнему определяться через электрический и магнитный векторы Герца $\vec{Z}_e$ и $\vec{Z}_m$, для которых, очевидно, справедливы формулы

$$\begin{aligned} Z_e &= \int\limits_{(L)} \Pi_e(M, M_0;\, z-\zeta)\, I(s)\, ds, \\ Z_m &= \int\limits_{(L)} \Pi_m(M, M_0;\, z-\zeta)\, I(s)\, ds, \end{aligned} \tag{41}$$

где интегрирование проводится вдоль тока L.

Решение задачи о возбуждении произвольными заданными токами может быть получено сразу же, если известно решение для произвольно направленного элементарного тока.

Поэтому рассмотрим такой элемент тока, помещенный в точку (M_0, ζ) и имеющий направление, характеризуемое единичным вектором $\vec{l}(\alpha, \beta, \gamma)$, где α, β, γ — направляющие косинусы углов, так что $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Пусть

$$\vec{\Pi}_1 = \Pi_1 \cdot \vec{l},$$

где $\Pi_1(M, M_0; z-\zeta)$ — функция, имеющая особенность типа $\frac{e^{ikr}}{r}$ в точке (M_0, ζ), в которой расположен диполь.

Очевидно, что

$$\vec{\Pi}_1 = \Pi_1 \alpha \vec{i}_1 + \Pi_1 \beta \vec{i}_2 + \Pi_1 \gamma \vec{i}_3,$$

где $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ — орты координатных осей.

Электрическое и магнитное поля могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}_1 + k^2\vec{\Pi}_1 + \vec{E}_1 \\ \vec{H} &= -ik\operatorname{rot}\vec{\Pi}_1 + \vec{H}_1 \end{aligned}\right\}, \tag{42}$$

где $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$ — индуцированные стенками поля, не имеющие нигде особенностей.

Нетрудно видеть, что

$$E_z = -\alpha \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_0 \partial z} - \beta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_0 \partial z} + \gamma\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi\right), \tag{43}$$

$$H_z = -ik\left(\alpha \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y_0} - \beta \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial x_0}\right), \tag{44}$$

где Π и $\hat{\Pi}$ — первая и вторая функции источника, так как функции, стоящие справа, обладают в источнике особенностями, определяемыми формулами (43) и (44) и, кроме того, для этих функций выполнены краевые условия и условия излучения.

Нахождение функций E_z и H_z фактически решает задачу, в силу того, что эти функции определяют все остальные компоненты поля. Для нахождения поперечных компонент поля вводим, подобно тому, как это было сделано выше, вектора Герца Z_e и Z_m. В данном случае элементарного тока вместо Z_e и Z_m следует рассматривать функции источника Π_e и Π_m, для которых получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} + k^2 \Pi_e &= -\alpha \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_0 \partial z} - \beta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_0 \partial z} + \gamma\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi\right) \\ \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} + k^2 \Pi_m &= -ik\left(\alpha \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial y_0} - \beta \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial x_0}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{45}$$

Легко показать, что решения этих уравнений выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} \Pi_e &= \pm\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial}{\partial y_0}\right) Q + \gamma \Pi \\ \Pi_m &= ik\left(\beta \frac{\partial}{\partial x_0} - \alpha \frac{\partial}{\partial y_0}\right) \hat{R} \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

причем в первой формуле верхний знак соответствует случаю $z > \zeta$, нижний знак — случаю $z < \zeta$.

Стоящая в правой части функция Π_ζ представляет собой первую функцию источника, а функция Q выражается формулой (33) и удовлетворяет волновому уравнению и краевому условию $Q = 0$ на Σ. Что касается функции $\hat{R}$, то она тоже удовлетворяет волновому уравнению, краевому условию $\frac{\partial \hat{R}}{\partial n}=0$ на Σ и определяется формулой (31).

До сих пор мы ограничивались нахождением полей, возбуждаемых элементарным током. Однако, пользуясь полученным нами решением, нетрудно перейти к случаю объемных, поверхностных или линейных токов. Все сводится к вычислению векторов Герца $\vec{Z}_e$ и $\vec{Z}_m$, которые, очевидно, даются соответствующими объемными, поверхностными или линейными интегралами [по аналогии с формулой (41)]. Дальнейшее вычисление полей производится согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}_e + k^2\vec{Z}_e + ik\operatorname{rot}\vec{Z}_m \\ \vec{H} &= -ik\operatorname{rot}\vec{Z}_e + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}_m + k^2\vec{Z}_m \end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

Полученные нами решения могут быть использованы для расчетов входного сопротивления линейной антенны, что и будет нами изложено в следующей статье. Отметим здесь лишь, что известные формулы Щелкунова [4] (круглый волновод), Слэтера [3] (прямоугольный волновод) для сопротивления излучения получаются непосредственно и просто с помощью найденного нами решения.

Литература

[1] А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. ЖТФ, *XVII*, вып. 11, 1947. — [2] Г. В. Кисунько. ЖТФ, *XVI*, 565, 1946. — [3] Дж. Слэтер. Передача ультракоротких радиоволн, ОГИЗ, гл. VII, 1946. — [4] S. A. Schelkunoff. Proc. Inst. Rad. Eng., *24*, 1383, 1936.

Поступило в Редакцию
8 июля 1947 г.