О ВОЗБУЖДЕНИИ РАДИОВОЛНОВОДОВ. I

А. А. Самарский и *А. Н. Тихонов*

Введение

Первое теоретичсекое исследование вопроса о возбуждении волноводов принадлежит Щелкунову [1], который рассматривал возбуждение волновода круглого сечения магнитным или электрическим диполем, ориентированным вдоль оси волновода (оси z). Решение этой задачи сводится к построению функции источника для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями: $u = 0$ (электрический диполь); $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (магнитный диполь), что Щелкунов, по существу, делал при помощи добавления к фундаментальному решению $\frac{e^{ikr}}{r}$ слагаемого, которое в сумме с фундаментальным решением удовлетворяло бы краевым условиям и принципу излучения.

Опубликованная в 1945 г. работа Мандельштама [2] также посвящена теории возбуждения круглых цилиндрических волноводов. Пользуясь наглядной физической картиной фиктивных двойных слоев, Мандельштам для построения решения применил обычный метод разделения переменных, в то время как Щелкунов искал решение в весьма специальной интегральной форме.

Слэтер в своей книге [3], вышедшей в свет в 1942 г., ссылаясь на неопубликованные результаты Синге и Щелкунова, рассматривает случай возбуждения простейшей волны типа H_{10} в волноводе прямоугольного сечения электрическим диполем, расположенным параллельно одной из сторон перпендикулярного сечения. Слэтер показывает, что, пользуясь методом отражений, можно получить после некоторых упрощающих предположений решение, годное на больших расстояниях от диполя, и рассчитать активную часть сопротивления излучения.

Такую же задачу решал и Вольман (1945 г.), использовавший метод отражений, сходный с методом, изложенным в книге Слэтера.

Задача возбуждений радиоволноводов объемными токами была рассмотрена Кисунько [4].

Целью настоящей работы является построение функций источников для цилиндрической области Σ произвольного сечения S. Мы покажем,[1] что функции источника имеют вид

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M_0)}{2\sqrt{\lambda_n - k^2}}\, e^{-\sqrt{\lambda_n - k^2}\,|z - z_0|} = \frac{e^{ikr}}{r} + \pi, \tag{2}$$

[1] Следует отметить, что изложенный в настоящей работе метод построения функ-

$$\hat{\Pi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M_0)}{2\sqrt{\hat{\lambda}_n-k^2}}\,e^{-\sqrt{\hat{\lambda}_n-k^2}(z-z_0)}=\frac{e^{ikr}}{r}+\hat{\pi}, \tag{3}$$

где функции π и $\hat{\pi}$ всюду регулярны и определены таким образом, что

$$\Pi=0,\ \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial n}=0 \text{ на } \sum.$$

При этом λ_n, $\hat{\lambda}_n$, ψ_n, $\hat{\psi}_n$ — собственные значения и собственные функции мембраны S.

$$\Delta_2\psi_n+\lambda_n\psi_n=0,\quad \psi_n=0\quad\left(\frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial n}=0\right) \tag{4}$$

(Δ_2 — двухмерный оператор Лапласа).

Функции Π и $\hat{\Pi}$ дают возможность решить задачу о возбуждении электрическим и соответственно магнитными диполем, параллельным оси z. Как будет показано в следующей работе, эти же функции позволяют решить задачу о возбуждении волновода произвольно расположенными токами.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный полый цилиндр Σ с идеально проводящими стенками, форма которого определяется кривой C, лежащей в плоскости перпендикулярного сечения xy (ось z направлена по оси цилиндра). Область, ограниченную кривой C и соответствующую внутренней части цилиндра, обозначим через S.

Нас интересует возбуждение подобного волновода линейным током, параллельным оси z. При этом будем, как обычно, изучать установившийся процесс, считая, что ток меняется по гармоническому закону

$$I=I_0(z)\,e^{-i\omega t};$$

временной фактор $e^{-i\omega_0 t}$ в дальнейшем будем опускать. В окрестности тока магнитное поле имеет особенность такого рода, что циркуляция по бесконечно малому контуру K_ε, охватывающему ток, равна

$$\oint_{(K_\varepsilon)} H_s\,ds=\frac{4\pi}{c}I, \tag{5}$$

точнее, мы будем предполагать, что вблизи линии тока магнитное поле имеет вид

$$H_s\approx\frac{2I}{c\rho}, \tag{5'}$$

где ρ — расстояние точки M_0 на линии тока от точки наблюдения на контуре K_ε. Задача состоит в нахождении электрического и магнитного полей, удовлетворяющих

ции источника Π был предложен впервые А. Н. Тихоновым в его работе, посвященной построению функции источника для уравнения теплопроводности (доложена на заседании Московского математического общества в 1938 г.).

1) уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= ik\vec{E}, \quad \left(k=\frac{\omega}{c}\right),\\ \operatorname{rot}\vec{E} &= -ik\vec{H},\\ \operatorname{div}\vec{E} &= 0,\\ \operatorname{div}\vec{H} &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

2) условию возбуждения в форме (5'),

3) граничному условию, которое, в силу идеальной проводимости стенок волновода, сводится к требованию

$$E_{\text{tang}} = 0 \text{ на } \Sigma,$$

4) условию излучения на бесконечности, которое мы здесь формулируем в виде требования отсутствия волн, приходящих из бесконечности.

Введем вектор Герца $\vec{Z}$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z} + k^2\vec{Z},\\ \vec{H} &= -ik\operatorname{rot}\vec{Z}. \end{aligned} \tag{7}$$

При этом вектор Герца направим вдоль оси z, т. е.

$$\vec{Z} = Z\cdot\vec{z}^{\circ},$$

где $\vec{z}^{\circ}$ единичный вектор вдол оси z.

Нетрудно убедиться в том, что Z удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta Z + k^2 Z = 0 \tag{8}$$

и краевому условию

$$Z = 0.$$[2]

Кроме того, на бесконечности Z удовлетворяет условию излучения

Будем искать функцию $Z(M, M_0; z)\begin{bmatrix} M = (x, y) \\ M_0 = (x_0, y_0) \end{bmatrix}$ в виде

$$Z(M, M_0; z) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N(\zeta)\,\Pi(M, M_0; z, \zeta)\,d\zeta, \tag{9}$$

где $N(\zeta)$ некоторая функция, которая должна быть определена из условия возбуждения (5).

[2] Это условие не является прямым следствием требования $E_{\text{tang}} = 0$, так как вектор Герца Z определяется неоднозначно с точностью до слагаемого вида $C_1 e^{ikz} + C_2 e^{-ikz}$, которое, однако, не оказывает влияния на электрическое и магнитное поля. Поэтому мы вправе распорядиться этим слагаемым так, чтобы можно было считать $Z = 0$ на границе.

Если функция $\Pi(M, M_0; z, \zeta)$ по переменным (M, z) удовлетворяет волновому уравнению, краевому условию $\Pi = 0$ на $\sum$, принципу излучения на бесконечности и имеет особенность порядка $\frac{e^{ikr}}{r}$ при совпадении аргументов, то все условия, определяющие $Z(M, M_0; z)$, будут удовлетворены.

В самом деле, как нетрудно видеть, функция $Z(M, M_0; z)$ будет иметь вдоль проводника особенность, равную $2\ln\frac{1}{\rho}\cdot N$, где $\rho = \overline{MM_0}$.

Так как

$$H_s = \overline{H_x s_x + H_y \cdot s_y} = -ik\left\{\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{y-y_0}{\rho} + \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{x-x_0}{\rho}\right\} = -ik\frac{\partial Z}{\partial \rho},$$

то отсюда следует, что составляющая магнитного поля H_s имеет главную часть $\frac{2ik}{\rho}N$, что и дает циркуляцию по бесконечно малому контуру, равную $\frac{4\pi I}{c}$, если положить $N(\zeta) = \frac{I(\zeta)}{ikc}$.

Таким образом, все сводится к построению функции источника $\Pi(M, M_0; z, \zeta)$, физический смысл которой ясен — это функция, определяющая поле, вызванное бесконечно малым линейным током (электрическим диполем), помещенным в точку (M_0, ζ).

Аналогично, рассматривая задачу о возбуждении волновода бесконечно малым замкнутым током, лежащим в плоскости xy (магнитный диполь), мы убедимся в том, что для определения соответствующего вектора Герца необходимо рассмотреть функцию $\hat{\Pi}(M, M_0; z, \zeta)$, которая удовлетворяет: 1) волновому уравнению; 2) условию излучения на бесконечности; 3) краевому условию $\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial n} = 0$ и 4) имеет особенность типа $\frac{e^{ikr}}{r}$ при совпадении аргументов.

§ 2. Вспомогательные оценки и сходимость рядов

Для изучения поведения функции $\Pi(M, M_0; z, \zeta)$ в области $|z-\zeta| > 0$ нам потребуются некоторые оценки для нормированных собственных функций мембраны и ее производных.[3]

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Нормированные собственные функции $\psi_n(M)$ мембраны, определяемые из условий

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0, \quad \psi_n = 0 \text{ на } C,$$

растут не быстрее $A_1\lambda_n$, где A_1 некоторая константа, т. е.

$$|\psi_n(x, y)| \leqslant A_1\lambda_n.$$

Для первых производных имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right| < A_2\lambda_n^2, \quad \left|\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\right| < A_2\lambda_n^2,$$

[3] Эти оценки имеют место для функций двух и трех независимых переменных.

а для вторых производных — оценки

$$\left|\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2}\right| < A_3 \lambda_n^3, \quad \left|\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2}\right| < A_3 \lambda_n^3,$$

справедливые для всякой области, лежащей внутри S.

Действительно, собственные функции удовлетворяют интегральному уравнению

$$\psi_n(x,y) = \lambda_n \iint\limits_{(S)} G_2(x,y;\xi,\eta)\, \psi_n(\xi,\eta)\, d\sigma_S,$$

где $G_2(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина для двухмерного („плоского") уравнения Лапласа. Пользуясь неравенством Шварца, имеем

$$|\psi_n(x,y)| \leqslant \lambda_n \sqrt{\iint\limits_{(S)} G_2^2(x,y;\xi,\eta)\, d\sigma_S \cdot \iint\limits_{(S)} \psi_n^2(\xi,\eta)\, d\sigma_S}$$

или

$$|\psi_n(x,y)| \leqslant A_1 \lambda_n,$$

где

$$A_1 = \sqrt{\iint\limits_{(S)} G_2^2(x,y;\xi,\eta)\, d\sigma_S}$$

является величиной ограниченной, так как функция Грина $G_2(x,y;\xi,\eta)$ положительна и $G_2 < \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d}{r}$, где d — диаметр области.

Оценка для $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$, нужная нам в дальнейшем для дифференцируемости ряда (2), получается на основании предшествующей оценки. В самом деле

$$\left|\frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right| \leqslant \lambda_n \iint \left|\frac{\partial G_2}{\partial x}(M_1, M_0)\right| |\psi_n(M_0)|\, d\sigma_{M_0} \leqslant A_2 \lambda_n^2,$$

где

$$A_2 = A_1 B$$

и

$$B = \iint\limits_{(S)} \left|\frac{\partial G_2}{\partial x}(M_1, M_0)\right| d\sigma_{M_0} < 2\sqrt{2}\, d\, 4\pi \, [6]. \tag{6}$$

Исходя из оценки для $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$, можно получить оценку для второй производной

$$\left|\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2}\right| \leqslant A_2 A_2' \lambda_n^3 = A_3 \lambda_n^3,$$

где A_2' — постоянная, зависящая от расстояния точки M_0 от контура. В самом деле, возьмем некоторую точку $M_0(\xi,\eta) \subset S$ и опишем вокруг этой точки окружность K_ε радиуса ε, целиком лежащую внутри S. Польуясь функцией Грина для этого круга, мы можем выразить значение $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$ внутри круга через значение ψ_n на контуре K_ε и дополнительный интеграл по площади круга

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} = -\lambda_n \iint G_2(M_1, M_0) \frac{\partial \psi_n}{\partial x}\, d\sigma + \int G_2 \psi_n \cos(\hat{s}, y)\, ds.$$

Отсюда видно, что значение $\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2}$ в точке M_0 зависит от максимума значений $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$ как внутри круга радиуса ε, так и на его границе K_ε, что и приводит нас к указанной оценке, причем постоянная A_2' зависит от радиуса ε окружности K_ε. Точно так же получаются оценки для $\frac{\partial \psi_n}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2}$. Лемма доказана.

Как известно [5], собственные значения краевой задачи

$$\Delta_2 u + \lambda u = 0, \quad u = 0 \text{ на } C$$

имеют (для плоской области) асимптотический порядок

$$\lambda_n = \frac{4\pi}{S} n.$$

Отсюда, на основании доказанных выше оценок, следует равномерная сходимость ряда (2), определяющего Π в области $|z-\zeta| > \delta$, где δ — любое сколь угодно малое положительное число, а тем самым непрерывность этой функции $\Pi(M_1, M_0; z, \zeta)$ и равенство ее нулю на контуре C для $z \neq \zeta$. Кроме того, из тех же оценок вытекает возможность почленного дифференцирования рядов (2) в области $z \neq \zeta$ и то, что эта функция удовлетворяет волновому уравнению.

§ 3. Обоснование разложения в ряды

Для выяснения особенности функции Π при $z = z_0$ рассмотрим область $|z - z_0| < \delta$ и обозначим ее через T_δ.

Как известно [6], уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ имеет единственное решение для области достаточно малого объема.

В самом деле, допуская существование двух решений u_1 и u_2 и рассматривая их разность, мы получаем собственную функцию $u^*(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$, удовлетворяющую нулевым краевым условиям на всей границе. Эта функция удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$u^*(x, y, z) = k^2 \iiint\limits_{(T')} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, u^*(\xi, \eta, \zeta)\, d\tau, \tag{10}$$

где $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ — функция Грина уравнения Лапласа. При определенных условиях для интегрального уравнения (10) применим метод последовательных приближений, и в этом случае $u^* \equiv 0$ в силу однородности уравнения (10). Для сходимости ряда последовательных приближений достаточно, чтобы

$$k^2 \iiint\limits_{(T')} |G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)|\, d\tau < 1. \tag{11}$$

Но функция Грина $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$, в силу известного свойства гармонических функций, может быть мажорирована функцией $\frac{1}{r}$. Поэтому условие (11) всегда выполнено, если выполнено неравенство

$$k^2 \iiint\limits_{(T')} \frac{1}{r}\, d\tau < 1, \tag{12}$$

что имеет место для достаточно малой области T'.

Мы будем считать, что область T_δ выбрана столь малой, что уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ не имеет нетривиальных решений, обращающихся в нуль на границе, как для этой области, так и для области удвоенных размеров по z.

Для этой области T_δ можно определить функцию Грина волнового уравнения как

$$R(M, z; M_0, z_0) = \frac{e^{ikr}}{r} + \chi(M, z), \tag{13}$$

где $\chi(M, z)$ — такое решение волнового уравнения, что $R = 0$ на границе T_δ. Существование такого решения не вызывает сомнений.

В самом деле, функция $\chi(M, z)$ определяется как решение интегрального уравнения

$$\chi(M, z) = k^2 \int\int\int G(M, z; \overline{M}, \zeta)\, \chi(\overline{M}, \zeta)\, d\tau + v(M, z), \tag{14}$$

где $G(M, z; \overline{M}, \zeta)$ — функция Грина уравнения Лапласа; $v(M, z)$ — решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее краевым условиям: $v = -\frac{e^{ikr}}{r}$ на границе T_δ.

Ясно, что такое построение возможно для областей, допускающих разрешимость задачи Дирихле для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$. Это является ограничением на форму области S. Во всем дальнейшем изложении относительно формы области S не делается никаких дополнительных предположений. Очевидно, что решение уравнения

$$\Delta w + k^2 w(M, z) = -F(M, z), \tag{15}$$

обращающееся в 0 на границах нашей области T_δ, представляется интегралом

$$w(M, z) = \int\int\int R(M, z; \overline{M}, \zeta)\, F(\overline{M}, \zeta)\, d\tau. \tag{16}$$

Наша ближайшая цель — дать другое представление для функции R, отличное от (13).

Будем искать решение уравнения (15) методом разделения переменных, считая, что $F(M, z)$ — „локальная“ функция, т. е. функция, отличная от нуля только в некоторой области, целиком лежащей внутри T_δ. Кроме того, мы будем предполагать, что функция $F(M, z)$ удовлетворяет достаточно высоким требованиям дифференцируемости.

Рассмотрим функцию $\Phi(M)$, определенную в S и обращающуюся в 0 на ее границе, для которой функция $H = \Delta_2 \Phi$ непрерывна в замкнутой области и имеет производные, непрерывные в окрестности всякой внутренней точки.

Тогда можно написать

$$\Phi(M) = \int\int G(M, \overline{M})\, H d\sigma_{\overline{M}}. \tag{17}$$

В силу теоремы Гильберта-Шмидта подобная функция может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $G_2(M, \overline{M})$ в области S.

Отсюда и на основании сделанных выше предположений относительно функции $F(M,z)$ следует, что функцию $F(M,z)$ можно представить в виде

$$F(M,z)=\sum_n \psi_n(M)F_n(z). \tag{18}$$

Аналогично положим

$$w(M,z)=\sum_n \psi_n(M)w_n(z), \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(M,z)=\sum \psi_n(M)f_n(z). \tag{20}$$

Для возможности такого разложения мы должны убедиться в выполнении формулированных выше условий.

Лемма 2. Если функция $w(M,z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta w+k^2 w(M,z)=-F(M,z) \tag{15}$$

и обращается в нуль на границе T_δ вместе с функцией $F(M,z)$, то функция $\overline{w}(M,z)=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ непрерывна в замкнутой области T_δ и может быть определена как решение уравнения

$$\Delta\overline{w}+k^2\overline{w}=-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \tag{21}$$

с нулевыми значениями на границе области T_δ.

Заметим предварительно, что если $v(M,z)$ есть решение уравнения $\Delta v+k^2 v=-f(M,z)$, где $f(M,z)$ — локальная функция, обращающаяся в нуль на границах области T_δ (т. е. на боковой поверхности Σ и при $z=z_1$ и $z=z_2$), то функция $v(M,z)$ имеет непрерывные производные по переменным x и y при $z=z_1$ и $z=z_2$. Докажем сначала непрерывность производных по x и y при $z=z_1$, для чего рассмотрим область T_δ', симметричную области T_δ относительно плоскости $z=z_1$. Функцию $f(M,z)$ в области T_δ' определим с помощью нечетного продолжения.

В силу выбора области T_δ, уравнение $\Delta v+k^2 v=-f$ в области $T_\delta+T_\delta'$ имеет единственное решение, обращающееся в 0 при $z=z_2$ и $z=z_2^*=z_1-\delta$.

Это решение представляет собой функцию V, нечетную относительно $z=z_1$, обращающуюся в 0 при $z=z_1$ и имеющую непрерывные производные по каждому из переменных x, y и z всюду для $z_2^*<Z<z_2$, в частности и для $z=z_1$.

В области T_δ функция $V=v$. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для $z=z_2$.

Рассмотрим теперь функцию $\overline{w}$, удовлетворяющую уравнению 21 и нулевым краевым условиям. Пусть $w^*(M,z)$ решение уравнения

$$\frac{d^2 w^*}{dz^2}=\overline{w}(M,z), \tag{22}$$

равное нулю при $z=z_1$ и $z=z_2$. Если $K(z,\zeta)$ — функция Грина уравнения (21), выражение для которой хорошо известно, то функция $w^*(M,z)$, очевидно, может быть представлена в виде

$$w^*(M,z)=-\int_{z_1}^{z_2} K(z,\zeta)\overline{w}(M,\zeta)\,d\zeta. \tag{23}$$

Убедимся в том, что функция $w^*(M, z)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция $w(M, z)$.

Пользуясь сделанным в начале леммы замечанием, можно написать

$$\Delta_2 w^* = -\Delta_2 \int_{z_1}^{z_2} K\overline{w}d\zeta = -\int_{z_1}^{z_2} K(z,\zeta)\Delta_2 \overline{w}d\zeta.$$

Тогда

$$\Delta w^* + k^2 w^* = \Delta_2 w^* + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} + k^2 w^* =$$

$$= -\int_{z_1}^{z_2} K(z,\zeta)\Delta_2 \overline{w}d\zeta + \overline{w} + k^2 \int_{z_1}^{z_2} K\overline{w}d\zeta. \tag{24}$$

Находя из уравнения (21)

$$\Delta_2 \overline{w} = -\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial z^2} - k^2 \overline{w} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

и подставляя это выражение в (24), получим

$$\Delta w^* + k^2 w^* = \int_{z_1}^{z_2} K \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \zeta^2} d\zeta + k^2 \int_{z_1}^{z_2} K\overline{w}d\zeta + k^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} K d\zeta +$$

$$+ \overline{w} - k^2 \int_{z_1}^{z_2} K\overline{w}d\zeta.$$

Учитывая, что

$$\int_{z_1}^{z_2} K \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \zeta^2} d\zeta = -\overline{w}(M, z) \quad \text{и} \quad \int_{z_1}^{z_2} K \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} d\zeta = -F(M, z),$$

имеем

$$\Delta w^* + k^2 w^* = -F,$$

т. е. функция $w^*(M, z)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $w(M, z)$. Кроме того, $w^*(M, z)$ обращается в нуль на всей границе области T_δ: при $z = z_1$ и $z = z_2$ $w^* = 0$ по определению, на боковой поверхности $w^* = 0$ в силу того, что это условие имеет место для функции $\overline{w}(M, z)$.

Принимая во внимание выбор области T_δ, гарантирующий единственность решения волнового уравнения в этой области, мы заключаем отсюда, что

$$w^*(M, z) \equiv w(M, z).$$

Из доказанной леммы следует, что

$$\Delta_2 w = -F - k^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -H(M, z)$$

является непрерывной функцией в замкнутой области.

Дифференцируемость функции H в окрестности любой внутренней точки не вызывает сомнения.

Аналогичные рассуждения по отношению к функции $\overline{w}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ показывают, что

$$\Delta_2 \overline{w} = -\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - k^2\overline{w} - \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial z^2} = -\overline{H}$$

является также функцией, непрерывной в замкнутой области, дифференцируемой в окрестности всякой внутренней точки.

Таким образом, обоснована справедливость написанных выше представлений (19) и (20) для функций w и $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$.

Кроме того, из непрерывности функции $\overline{w}(M, z)$ в замкнутой области непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \int\int \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(M, z)\,\psi_n(M)\,d\sigma_M = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\int w(M, z)\,\psi_n(M)\,d\sigma_M = w_n''(z). \end{aligned} \tag{25}$$

§ 4. Построение функции источника

Доказав возможность представлений (19) и (20), перейдем к определению коэффициентов Фурье $w_n(z)$ и $f_n(z)$.

Из уравнения $\Delta w + k^2 w = -F$ имеем

$$\Delta_2 w = -F - k^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Учитывая (18) — (20), найдем

$$\Delta_2 w = -\sum_n \psi_n\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} + k^2 w_n + F_n\right).$$

Из уравнения плоской мембраны $\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0$ выразим ψ_n через $\Delta_2\psi_n$. Тогда

$$\Delta_2 w(M, z) = \sum_n \Delta_2\psi_n(M)\,\Phi_n(z), \tag{26}$$

где

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\lambda_n}\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} + k^2 w_n(z) + F_n(z)\right\}. \tag{27}$$

При фиксированном значении z функция $w(M, z)$ непрерывна и обращается в нуль на Σ. Двухмерный оператор Лапласа от $w(M, z)$, как было доказано, является функцией непрерывной в замкнутой области S и дифференцируемой во всякой внутренней точке.

Умножая (26) на функцию Грина плоской области S и интегрируя по этой области, восстановим функцию $w(M, z)$; ряд, стоящий справа, допускает почленное интегрирование в силу его равномерной сходимости, которая следует из равномерной сходимости рядов (18), (19), (20) его составляющих. В результате применения указанных операций находим

$$w(M, z) = \sum_n \psi_n(M)\,\Phi_n(z).$$

Сравнение этого ряда с предшествующим разложением (19) для функции $w(M, z)$ показывает, что

$$\Phi_n(z) = w_n(z),$$

откуда получаем уравнение, определяющее функцию $w_n(z)$

$$\frac{d^2 w_n}{dz^2} - (\lambda_n - k^2)\, w_n(z) = -F_n(z). \tag{28}$$

В качестве дополнительных условий имеем

$$\begin{aligned} w_n(z_0 - \delta) &= 0, \\ w_n(z_0 + \delta) &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Обратимся теперь к решению этого уравнения. Возьмем функцию Грина $R_n(z, \zeta)$ уравнения (28), соответствующую краевым условиям (29). Эта функция удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 R_n(z,\zeta)}{d\zeta^2} - p_n^2 R_n(z,\zeta) = 0 \\ &R_n(z, z_0 - \delta) = 0 \\ &R_n(z, z_0 + \delta) = 0 \\ &\left[\frac{dR_n(z,\zeta)}{d\zeta}\right]_{\zeta = z - 0}^{\zeta = z + 0} = 1 \end{aligned}\right\}, \tag{30}$$

где $p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$.

Нетрудно найти явное выражение для функции $R_n(z, \zeta)$

$$R_n(z,\zeta) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh} p_n (z_0 + \delta - \zeta)\operatorname{sh} p_n (z_0 - \delta - z)}{p_n \operatorname{sh} 2p_n \delta}, & \zeta > z, \\ -\dfrac{\operatorname{sh} p_n (z_0 - \delta - \zeta)\operatorname{sh} p_n (z_0 + \delta - z)}{p_n \operatorname{sh} 2p_n \delta}, & \zeta < z. \end{cases} \tag{31}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. Функция Грина $R_n(z, \zeta)$ может быть представлена в виде

$$R_n(z,\zeta) = \frac{e^{-p_n |z - \zeta|}}{2p_n} + Q_n, \tag{32}$$

где

$$Q_n = O\left(\frac{e^{-p_n [\delta - (z_0 - \zeta)]}}{2p_n}\right) \tag{33}$$

(при $z > \zeta$)

Для определенности рассмотрим случай $z > \zeta$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_n &= -\frac{\operatorname{sh} p_n (z_0 - \delta - \zeta) + \operatorname{sh} p_n (z_0 + \delta - z)}{p_n \operatorname{sh} 2p_n \delta} - \frac{e^{-p_n (z - \zeta)}}{2p_n} = \\ &= -\frac{\operatorname{ch} p_n (2z_0 - z - \zeta) + \operatorname{ch} p_n [2\delta - (z - \zeta)]}{2p_n \operatorname{sh} 2p_n \delta} - \\ &\quad - \frac{\operatorname{ch} p_n (z - \zeta) - \operatorname{sh} p_n (z - \zeta)}{2p_n} = \\ &= \frac{-\operatorname{ch} p_n (2z_0 - z - \zeta) + \operatorname{ch} p_n (z - \zeta)\, e^{-2p_n \delta}}{2p_n \operatorname{sh} 2p_n \delta}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$Q_n = O\left(\frac{e^{-p_n[\delta-(z_0-\zeta)]}}{2p_n}\right).$$

Решение уравнения (28), очевидно, имеет вид

$$w_n(z) = \int\limits_{z_0-\delta}^{z_0+\delta} R_n(z,\zeta)\, F_n(\zeta)\, d\zeta, \tag{34}$$

или, если принять во внимание формулу (18), то можно написать

$$w_n(z) = \int\int\int R_n(z,\zeta)\, F(\overline{M},\zeta)\, \psi_n(\overline{M})\, d\sigma_{\overline{M}}\, d\zeta. \tag{35}$$

Обращаясь снова к функции $w(M,z)$ и учитывая полученный результат, на основании формулы (19) получим

$$w(M,z) = \sum_n \int\int\int \psi_n(M)\, \psi_n(\overline{M})\, R_n(z,\zeta)\, F(\overline{M},\zeta)\, d\sigma_M d\zeta. \tag{36}$$

Ряд

$$\overline{R}(M,\overline{M}; z,\zeta) = \sum_n \psi_n(M)\psi_n(\overline{M})\, R_n(z,\zeta), \tag{37}$$

в силу установленных оценок для функций R_n и установленных в § 3 оценок для $\psi_n(M)$, является рядом равномерно сходящимся во всякой области, где $|z-\zeta| > \eta > 0$. Функция $F(M,z)$ — локальная функция, отличная от нуля только внутри некоторой „малой“ области T_F, целиком лежащей внутри слоя $(\check{z}_1, \check{z}_2)$, т. е. для произвольной точки $(\overline{M},\zeta)$ замкнутой области T_F имеет место неравенство

$$\check{z}_1 < \zeta < \check{z}_2.$$

В этом случае, для всякой точки (M,z), лежащей вне слоя $(\check{z}_1, \check{z}_2)$, будем иметь

$$|z-\zeta| > \eta > 0,$$

где η есть положительное число, определяемое областью T_F. Тогда, для любой точки (M,z), лежащей вне полосы $(\check{z}_1, \check{z}_2)$, ряд для $R(M,\overline{M}; z,\zeta)$ сходится равиомерно, а потому

$$w(M,z) = \int\int\int \overline{R}(M,\overline{M}; z,\zeta)\, F(\overline{M},\zeta)\, d\sigma_M\, d\zeta \tag{37'}$$

в области $z_1 < z < \check{z}_1$ или $\check{z}_2 < z < z_2$.

С другой стороны, мы имели

$$w(M,z) = \int\int\int \overline{R}(M,\overline{M}; z,\zeta)\, F(\overline{M},\zeta)\, d\sigma_M\, d\zeta,$$

где R определяется формулой (13).

в силу произвольности выбора функции F и теоремы единственности ряда следует (для $\zeta \neq z$)

$$\overline{R}(M, \overline{M}; z, \zeta) = R(M, \overline{M}; z, \zeta) = \frac{e^{ikr}}{r} + \chi. \tag{38}$$

Пользуясь представлением функции R_n

$$R_n(M, \overline{M}; z, \zeta) = \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2\varkappa_n} + Q_n,$$

чаем, что

$$R(M, \overline{M}; z, \zeta) = \overline{R}(M, \overline{M}; z, \zeta) = \Pi + \mu, \tag{39}$$

$$\Pi = \sum_n \psi_n(M)\psi_n(\overline{M}) \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2\varkappa_n}, \tag{40}$$

$$\mu = \sum_n \psi_n(M)\psi_n(\overline{M}) Q_n(z, \zeta). \tag{41}$$

Функция Π, а следовательно, и функция μ удовлетворяют волновому внению; при этом функция μ является регулярной функцией, что дует из оценок для ψ_n и Q_n.

Итак, для любой точки $(\overline{M}, \zeta)$ области $|z-\zeta| < \delta$, в частности, для ки (M_0, z_0) имеет место представление

$$\Pi(M, M_0; z, z_0) = \frac{e^{ikr}}{r} + \pi \quad (\pi = \chi - \mu), \tag{42}$$

$\Pi(M, M_0; z, z_0)$ всюду в этой области — регулярная функция.

При исследовании сходимости ряда, определяющего Π, мы считали ζ, и, таким образом, установленное нами равенство (39) имеет место $z \neq z_0$. Оставляя в стороне вопрос о сходимости ряда, определяющего при $z = z_0$, мы дополним определение функции Π по непрерывности; довательно, формула (40) имеет место и в этом случае.

Заметим, что построенная нами функция Π симметрична относительно скости $z = \zeta$ и в плоскости $z = \zeta$ эта функция дифференцируема ду, кроме точки $M = M_0$.

Отсюда следует, что $\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0$ при $z = \zeta$, т. е. что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_n \frac{\psi_n(M)\psi_n(M_0)}{2} e^{-p_n\varepsilon} = 0. \tag{43}$$

$$(M \neq M_0)$$

Аналогичный ход рассуждений может быть применен в отношении кции $\hat{\Pi}(M, M_0, z, \zeta)$ и дает, что

$$\hat{\Pi}(M, M_0; z, \zeta) = \sum_n \frac{\hat{\psi}_n(M)\hat{\psi}_n(M_0)}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|}. \tag{44}$$

Литература

[1] S. A. Schelkunoff. Proc. Inst. Rad. Eng., *24*, 1383, 1936. — [2] Л. И. Мандельштам. ЖЭТФ, *15*, 605, 1945. — [3] Дж. Слэтер. Передача ультракоротких радиоволн, гл. *VII*, 1946, ОГИЗ. — [4] Г. В. Кисунько. ЖТФ, *XVI*, 565, 1946. — [5] Р. Курант и Гильберт. Методы математической физики, *I*, 409, ГТТИ, 1933. — [6] В. В. Немыцкий. Математический сборник, *I*, 485, 1936.

Поступило в Редакцию
8 июля 1947 г.